Tajemná funkce

> Vymyslel jsem si tajemnou funkci $P(x)$, do které se dá strčit jakékoli reálné číslo a výsledkem bude zas reálné číslo. K této funkci Vám sdělím jen dvě pravidla:
>
> 1. $P(1) = 2$;
> 2. Pro jakákoli reálná čísla a, b platí $P(a)P(b) = P(a + b)$.

1 Vypočtěte $P(2)$, $P(3)$ a $P(4)$.

2 Dokažte, že $P(x)$ nemůže být pro žádné x nula. *(Zkuste důkaz sporem: řekněme, že pro nějaké číslo a platí $P(a) = 0$. Zvládnete z toho pomocí druhého pravidla odvodit $P(1) = 0$? To je totiž v rozporu s prvním pravidlem, takže $P(a) = 0$ nemůže platit nikdy.)*

3 Napsal jsem si na papírek důkaz, že $P(x)$ musí být vždy kladné, ale začátek důkazu mi sežral pes. Dokážete ho správně doplnit? Mám pocit, že se tam muselo nějak chytře použít to druhé pravidlo…

> … $= P(\frac{x}{2})^2 \geq 0$, *neboť čtverec reálného čísla je vždy nezáporný. Nula to není, takže* $P(x) > 0$. ■

4 Dokažte, že $P(0) = 1$. *(Zkuste použít druhé pravidlo a to, že pro každé x platí $0 + x = x$.)*

5 Vymyslete, čemu se musí rovnat $P(-1)$ a $P(\frac{1}{2})$.

6 Obecně: pokud znáte $P(x)$, jak z něj vypočtete $P(-x)$?

7 Ukažte, že druhé pravidlo platí i pro víc čísel: $P(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = P(a_1)P(a_2)\cdots P(a_n)$. *(Pro dva sčítance to platí. Pro víc zkuste indukci a součet rozeberte vždy na první sčítanec a zbytek.)*

8 Zapište pomocí nějakých početních úkonů s číslem $P(x)$, čemu se rovnají následující výrazy: **1.** $P(nx)$; **2.** $P(x/n)$; **3.** $P(kx/n)$. (Zde k a n jsou přirozená čísla.)

9 Řekněme, že máme nějakou ještě jinou funkci g, o níž je známo jen to, že pro všechna reálná čísla a, b, splňuje $g(a)g(b) = g(a + b)$ (tedy naše druhé pravidlo), ale první pravidlo splňovat nutně nemusí. Ukažte, že musí platit $g(x) = P(cx)$, kde c je nějaká konstanta. Popište, jakou podmínku musí c splnit, aby vztah platil.

> V dalším je $Q(x)$ inversní funkcí k $P(x)$.

10 Vypočtěte $Q(x)$ pro následující čísla (tedy řekněte, z jakého čísla mám udělat P, aby mi vyšlo právě tohle, nebo řekněte, že takové číslo vůbec neexistuje): **1.** 4; **2.** $\frac{1}{2}$; **3.** $16\sqrt{2}$; **4.** $-\frac{1}{4}$; **5.** $\sqrt[3]{4}$.

11 Vysvětlete, jaká čísla se smějí dávat do $Q(x)$, aby to vůbec dávalo smysl. Také řekněte, jestli výsledkem $Q(x)$ mohou být všechna možná čísla, nebo jestli některá nikdy vyjít nemohou.

12 Dokažte následující vztahy pro funkci Q:
1. $Q(1) = 0$; **2.** $Q(a_1) + Q(a_2) + \dots + Q(a_n) = Q(a_1 a_2 \cdots a_n)$; **3.** $Q(1/x) = -Q(x)$; **4.** $nQ(x) = Q(x^n$
5. $\frac{1}{n}Q(x) = Q(\sqrt[n]{x})$. ($n$ je přirozené číslo.) *(Zkuste na již získané vztahy pro P vhodně uplatňovat Q. Také je někdy dobře v těchto vztazích místo x psát raději Q nějakého jiného čísla y.)*

13 Vraťme se k úloze 9. Tam jsme viděli, že všechny funkce g, které splňují druhé pravidlo (ale ne nutně první), jsou velmi přímočaře vázány s P. Můžeme tedy očekávat, že g^{-1} bude nějak přímočaře vázáno s Q. Najděte, jaký vztah mezi nimi je.