Odpovědi a řešení k úlohám na komplexní čísla

1 Uděláme to, co se po nás chce, a vytkneme takto:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi+\psi}{2}} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi-\psi}{2}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi-\psi}{2}} \right]$$

(nevěříte-li, roznásobte si závorku napravo). Podle Eulerových vzorců platí $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) = \cos x$ a závorka v našem výrazu má přesně ten tvar. Místo ní tedy můžeme napsat $2\cos\frac{\varphi-\psi}{2}$ a skutečně dostaneme

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi+\psi}{2}} \cos\frac{\varphi-\psi}{2} = 2\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\left[\cos\frac{\varphi+\psi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\right].$$

Exponenciály vlevo také můžeme rozložit na reálnou a imaginární část. Tak dostaneme

$$\cos\varphi + \cos\psi + \mathrm{i}\,(\sin\varphi + \sin\psi) = 2\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\left[\cos\frac{\varphi+\psi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\right].$$

Musí se rovnat zvlášť reálné a zvlášť imaginární části, takže dostáváme

$$\begin{aligned} \cos\varphi + \cos\psi &= 2\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}, \\ \sin\varphi + \sin\psi &= 2\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}. \end{aligned}$$

2 Podle Eulerových vzorců můžeme psát

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + 1).$$

Zapíšeme tak všechny tři kosiny a dostaneme

$$4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha+\beta+\gamma)/2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + 1)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} + 1)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma} + 1).$$

Máme $(\alpha+\beta+\gamma)/2 = \pi/2$, a tak ta exponenciála před závorkou je prostě jen $1/\mathrm{i}$. Roznásobením všech tří závorek dostaneme

$$4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta+\gamma)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta+\gamma)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma+\alpha)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma} + 1\right].$$

Použitím $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta+\gamma)} = -1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}$ atd. se monstrvýraz v závorce poněkud zjednoduší:

$$4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[-1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma} + 1\right] = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma,$$

protože podle Eulerových vzorců platí $\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}) = \sin\alpha$ atd.

3 Stačí si uvědomit, že $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} = \arg(5+\mathrm{i})$ a $\operatorname{arc\,tg}\frac{-1}{239} = \arg(239-\mathrm{i})$. Proto musíme spočítat

$$(5+\mathrm{i})^4(239-\mathrm{i}) = (625 + 500\mathrm{i} - 150 - 20\mathrm{i} + 1)(239-\mathrm{i}) = (476 + 480\mathrm{i})(239-\mathrm{i}).$$

Jestli má být argument tohoto čísla $\pi/4$, jak se to říká v zadání, tak musí být reálná část tohoto součinu stejná jako imaginární. To buď ověříme snadno na kalkulačce, nebo se na to můžeme podívat takto: reálná je $476\cdot 239 + 480$, imaginární je $480\cdot 239 - 476$. Odečtu je od sebe a dostanu $4\cdot 239 - 956$, a tady se lze už i z hlavy přesvědčit, že rozdíl je skutečně nula a proto je $\mathfrak{Re} = \mathfrak{Im}$.

$\boxed{4}$ Uděláme, co se po nás v zadání žádá. Dosadíme $x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ a ještě to všechno přenásobíme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. Tím obdržíme

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left[1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi} + \cdots + \mathrm{e}^{(n-1)\mathrm{i}\varphi}\right] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\frac{\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\varphi} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - 1}.$$

Ve zlomku vytknu v čitateli $\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\varphi/2}$, ve jmenovateli $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2}$, a tím skutečně získám

$$\exp\left[\mathrm{i}\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\varphi\right)\right] \cdot \frac{\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\varphi/2} - \mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\varphi/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2}},$$

přičemž podle Eulerových vzorců platí $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = 2\mathrm{i}\sin x$. $2\mathrm{i}$ se pokrátí a zůstane skutečně

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\varphi)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+2\varphi)} + \cdots + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+(n-1)\varphi)} = \exp\left[\mathrm{i}\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\varphi\right)\right]\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Pak už stačí vzít reálnou a imaginární část a dostat

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\varphi) + \cos(\alpha+2\varphi) + \cdots + \cos[\alpha+(n-1)\varphi] = \cos\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\varphi\right)\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

$$\sin\alpha + \sin(\alpha+\varphi) + \sin(\alpha+2\varphi) + \cdots + \sin[\alpha+(n-1)\varphi] = \sin\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\varphi\right)\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

$\boxed{5}$ Protože $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$, je opravdu zjevně $\frac{\mathfrak{Im}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\mathfrak{Re}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$. No a protože máme

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)} = \cos\varphi\cos\psi(1 + \mathrm{i}\operatorname{tg}\varphi)(1 + \mathrm{i}\operatorname{tg}\psi) = \cos\varphi\cos\psi\left[1 - \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi + \mathrm{i}(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi)\right],$$

zjistíme skutečně, že

$$\operatorname{tg}(\varphi+\psi) = \frac{\mathfrak{Im}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)}}{\mathfrak{Re}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)}} = \frac{\cos\varphi\cos\psi(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi)}{\cos\varphi\cos\psi(1 - \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi)} = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi}{1 - \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi}.$$

U tří úhlů bude podobně

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b+c)} = \cos a\cos b\cos c(1 + \mathrm{i}\operatorname{tg} a)(1 + \mathrm{i}\operatorname{tg} b)(1 + \mathrm{i}\operatorname{tg} c).$$

Co bude obsahovat reálná část součinu těch tří závorek? Zřejmě činitele, kde není žádné i (ten je jen jeden. $1\cdot1\cdot1$), a pak ty, které obsahují dvě i, takže se v součinu objeví $\mathrm{i}^2 = -1$. Ty jsou tři: $\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b$, $\operatorname{tg} b\operatorname{tg} c$ a $\operatorname{tg} c\operatorname{tg} a$ — všechny součiny po dvou. Naopak imaginární část obsahuje všechny součiny s jedním i (ty jsou zase tři, a to $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{tg} b$ a $\operatorname{tg} c$), a pak ty s třemi i (ten je jeden: $\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b\operatorname{tg} c$, a navíc $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$). Podělením dostaneme

$$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a\operatorname{tg} b\operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg} a\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} b\operatorname{tg} c - \operatorname{tg} c\operatorname{tg} a}.$$

Už je Vám asi jasné, podle jakého vzoru to bude pokračovat u většího počtu úhlů. V čitateli bude imaginární část, která bude obsahovat součiny s lichým počtem i, tedy součet součinů po jednom, mínus ($\mathrm{i}^2 = -1$) součet součinů po třech, plus součet součinů po pětí, a tak furt, zato ve jmenovateli bude reálná část: 1 mínus součet součinů po dvou plus součet součinů po čtyřech a tak furt. Dá se to zapsat třeba nějak takhle:

$$\operatorname{tg}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{S_1 - S_3 + S_5 - S_7 + \cdots}{1 - S_2 + S_4 - S_6 + \cdots},$$

kde S_k je součet všech možných součinů tangent po k a v čitateli i ve jmenovateli se objevují další a další členy se střídavými znameními až do S_n.

6 Vektor z bodu $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$ do bodu $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$ můžu zapsat jako $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$, a podobně zapíšu i vektor z $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$ do $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$. Obě tato čísla budou v polárním tvaru vypadat jako $r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1}$, resp. $r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_2}$ (pro nějaké $r_{1,2}$ a $\alpha_{1,2}$). Takže pokud chci rozdíl úhlů mezi těmito vektory, musím je podělit a dostanu

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}} = \frac{r_2}{r_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_2-\alpha_1)}.$$

Z toho výsledku mě zajímá jen $\alpha_2 - \alpha_1$ v exponenciále, zatímco podíl velikostí je mi úplně jedno. Proto vezmeme argument, který nám právě ten úhel vytáhne, a mám

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \arg \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}}.$$

No a teď udělám to, co už tu bylo mockrát: v čitateli vytknu $\exp \mathrm{i}\frac{\varphi_2+\psi}{2}$, ve jmenovateli $\exp \mathrm{i}\frac{\varphi_1+\psi}{2}$, čímž dostanu

$$\arg \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}} = \arg \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_2-\varphi_1)/2} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi_2-\psi}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi_2-\psi}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi_1-\psi}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi_1-\psi}{2}}} \right) = \cdots$$

Využijeme toho, že argument součinu je součet argumentů:

$$\cdots = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + \arg \frac{2\mathrm{i} \sin \frac{\varphi_2-\psi}{2}}{2\mathrm{i} \sin \frac{\varphi_1-\psi}{2}} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + \arg \frac{\sin \frac{\varphi_2-\psi}{2}}{\sin \frac{\varphi_1-\psi}{2}}.$$

Ten podíl sinů je už ale reálný, takže jeho argument může být buď nula (pokud je ten podíl kladný), nebo π (pokud je záporný). Na ničem kromě znamení tohoto podílu už nezáleží. Když se to rozmyslí, je vidět, že to π se přičítá, pokud je $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$ „mezi“ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$ a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$ (v tom smyslu, že je mezi nimi na té straně, kde je mezi těmito dvěma body kratší oblouk).