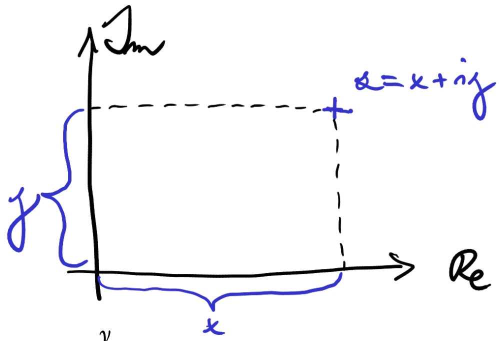
1 Vypočtěte si těchto pár součinů (x a y jsou reálná čísla):

1. $(1-3\mathrm{i})\cdot(-2+3\mathrm{i})$, **2.** $(-4+\mathrm{i})\cdot(-1+2\mathrm{i})$, **3.** $\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)$, **4.** $2(x+\mathrm{i}y)$, **5.** $(5+3\mathrm{i})(4-3\mathrm{i})$.

2 Dokažte nebo vyvraťte následující vztahy:

1. $\mathfrak{Re}(z+w)=\mathfrak{Re}\,z+\mathfrak{Re}\,w$; **2.** $\mathfrak{Re}(zw)=\mathfrak{Re}(z)\cdot\mathfrak{Re}(w)$; **3.** $\mathfrak{Re}\,\frac{z}{w}=\frac{\mathfrak{Re}\,z}{\mathfrak{Re}\,w}$.
Změní se něco, když místo $\mathfrak{Re}$ budeme psát $\mathfrak{Im}$?



3 Komplexní čísla se často kreslí do roviny: číslo $x+\mathrm{i}y$ se prostě nakreslí jako bod $[x;y]$ v kartézských souřadnicích tak, jak je to na obrázku vpravo. Kde na tomto obrázku najdete $|z|$ a $\arg z$? Nakreslete je tam.

4 Odvoďte pro velikost a argument čísla $z=x+\mathrm{i}y$ tyto vztahy: **1.** $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$; **2.** $\operatorname{tg}\arg z=\frac{y}{x}$.
Nepovinně můžete odvodit i tyto: **3.** $\cos\arg z=\frac{x}{|z|}$; **4.** $\sin\arg z=\frac{y}{|z|}$.

5 Kolik je $|\mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi}|$ pro jakékoli reálné φ? Jaký útvar vykreslí $\mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, když spojitě zvyšuju φ od 0 do 2π?

6 Jestli se má $\mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ chovat jako opravdová exponenciála, tak musí splňovat základní podmínku:

$$\mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi}\cdot\mathbf{e}^{\mathrm{i}\psi}=\mathbf{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)}.$$

Ověřte to dosazením $\mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi}=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$ atd. za všechny exponenciály. Pak roznásobte závorky a použijte součtové vzorce.

7 Jen s pomocí základní podmínky $\mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi}\cdot\mathbf{e}^{\mathrm{i}\psi}=\mathbf{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)}$ ukažte, že platí také:

1. $\mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi}\cdot\mathbf{e}^{-\mathrm{i}\varphi}=1$, z čehož vyplývá $\mathbf{e}^{-\mathrm{i}\varphi}=\frac{1}{\mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi}}$; **2.** $(\mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi})^n=\mathbf{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$, kde n je přirozené; **3.** $\frac{\mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{\mathbf{e}^{\mathrm{i}\psi}}=\mathbf{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)}$.

8 Čemu se rovná výraz $\mathbf{e}^{2\pi\mathrm{i}}$? A čemu $\mathbf{e}^{2k\pi\mathrm{i}}$, kde k je jakékoli celé číslo? Umíte z toho vyvodit, že exponenciála $\mathbf{e}^{z}$ je funkce s periodou $2\pi\mathrm{i}$?

9 Jestliže jste zvládli všechna tato cvičení, můžete si velmi snadno odvodit jakýkoli goniometrický vzorec. Předvedu to na příkladě: jistě třeba platí $\mathbf{e}^{2\mathrm{i}\varphi}=(\mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi})^2$. Dosadíme $\mathbf{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ a máme

$$\cos 2\varphi+\mathrm{i}\sin 2\varphi=(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^2=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi+2\mathrm{i}\cos\varphi\sin\varphi.$$

Když porovnáte reálné a imaginární části, dostanete vztahy pro $\cos 2\varphi$ a $\sin 2\varphi$. Zkuste si podobně rychle odvodit vztahy pro: **1.** $\cos 3\varphi$ a $\sin 3\varphi$ (použijte $\mathbf{e}^{3\mathrm{i}\varphi}=(\mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi})^3$); **2.** $\cos(a+b-c)$ a $\sin(a+b-c)$ (použijte $\mathbf{e}^{\mathrm{i}(a+b-c)}=\mathbf{e}^{\mathrm{i}a}\cdot\mathbf{e}^{\mathrm{i}b}\cdot\mathbf{e}^{-\mathrm{i}c}$); **3.** $\sin(a-2b)$ a $\cos(a-2b)$ (tady na to přijdete sami, ne?).

10 Ukažte, že $(r\mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi})^\star=r\mathbf{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$: tedy komplexní sdružení nechává velikost být a u argumentu změní znamení.

11 Dokažte nebo vyvraťte následující vztahy: (Půjde to snáz, když z a w zapíšete v polárním tvaru.)

1. $(z+w)^\star=z^\star+w^\star$; **2.** $(zw)^\star=z^\star+w^\star$; **3.** $\left(\frac{z}{w}\right)^\star=\frac{z^\star}{w^\star}$; **4.** $(z^n)^\star=(z^\star)^n$.

12 Už víme, že když $z=x+\mathrm{i}y$, tak $z^\star=x-\mathrm{i}y$. Odvoďte z toho vztahy

$$\mathfrak{Re}\,z=\frac{z+z^\star}{2},\qquad \mathfrak{Im}\,z=\frac{z-z^\star}{2\mathrm{i}}.$$

Pak položte $z=\mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Měli byste dostat takzvané *Eulerovy vztahy*:

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi}+\mathbf{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2};\qquad \sin\varphi=\frac{\mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi}-\mathbf{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}.$$