Počítání do prvního řádu

Ve všech následujících úlohách označují ϵ a δ velmi malé veličiny prvního řádu.

1 Počítejte do prvního řádu a upravte následující výrazy:

1. $(1+\epsilon)(2+\epsilon)$; **2.** $(2-\epsilon)(3+\delta)$; **3.** $(1+\epsilon)(1-\epsilon)$; **4.** $\epsilon(2-\epsilon)$; **5.** $(5+2\epsilon)^2$.

2 Podívejte se na bod číslo 3 v předchozí úloze. Čemu je do prvního řádu rovno $\frac{1}{1+\epsilon}$?

3 Vyčíslete následující výrazy do prvního řádu:

1. $(1+\epsilon)^3$; **2.** $(1+\epsilon)^4$; **3.** Jak dopadne $(1+\epsilon)^n$, kde n je jakékoli přirozené číslo?

4 Vyčíslete do prvního řádu výraz $\sqrt[n]{1+\epsilon}$ takto: při $\epsilon = 0$ je to rovno jedné, takže do prvního řádu musí být $\sqrt[n]{1+\epsilon} = 1 + a\epsilon$ pro nějaké neznámé a. Umocněte tuto rovnici na n-tou, použijte pravidlo z předchozí úlohy a zjistěte a.

5 Shrňte poznatky tří předchozích úloh: vyčíslete do prvního řádu výraz $(1+\epsilon)^\alpha$, kde α je jakékoli racionální číslo (tedy $\alpha = \pm p/q$, kde p, q jsou přirozená čísla).

6 Uvažme funkci $f(x) = x^\alpha$, kde α je jakékoli racionální číslo. Do prvního řádu vyčíslete $f(x+\epsilon)$. Z výsledku zjistěte $f'(x)$, tedy derivaci funkce f v libovolném bodě x. **Nápověda:** $(x+\epsilon)^\alpha = x^\alpha(1+\frac{\epsilon}{x})^\alpha$.

7 Využijte fakt, že do prvního řádu platí $\sin\epsilon = \epsilon$, k vyčíslení $\cos\epsilon$ do prvního řádu. **Nápověda:** Zkuste upotřebit goniometrickou jedničku $\sin^2\epsilon + \cos^2\epsilon = 1$.

8 Podle součtových vzorců rozepište $\sin(x+\epsilon)$ a $\cos(x+\epsilon)$. Obojí pak aproximujte do prvního řádu. Ve výsledcích identifikujte derivace funkcí $\sin x$ a $\cos x$.

9 Víme, že $\sqrt[3]{27} = 3$. Pomocí počítání do prvního řádu odhadněte $\sqrt[3]{28} = (27+1)^{1/3}$.

10 Přiložím kolmo k sobě dvě tyčky o délkách 3 a 4 a jejich volné konce spojím gumou. Zjistěte délku gumy a plochu takto vymezeného trojúhelníka. Pak výpočtem do prvního řádu zjistěte, jak se změní délka gumy a plocha, změníme-li pravý úhel mezi tyčkami o ϵ.

11 Válec o poloměru r a výšce h má objem $V = \pi r^2 h$. O kolik se změní objem, když se jeho poloměr o pět procent zvýší a jeho výška o pět procent zmenší?

12 Pat a Mat se svým obvyklým nadšením něco kutí na chatě. Kdyby tam byl jen sám Pat, zdemoloval by chatu za tři hodiny. Samotný Mat by ji zdemoloval za pět hodin.

1. Za jak dlouho zdemolují chatu oba dohromady?

2. Řekněme, že by Pat na zdemolování chaty potřeboval o ϵ hodin více a Mat o δ hodin více. Výpočtem do prvního řádu odhadněte, jak se změní čas, za který zdemolují chatu oba dohromady.

3. Naši kuťáci našli plechovku energeťáku, který umožní tomu, kdo ho vypije, zdemolovat chatu o čtvrt hodiny rychleji. S pomocí předchozího odhadu zjistěte, oč dřív chatu zdemolují oba dohromady, když: **A:** nápoj vypije Pat; **B:** nápoj vypije Mat; **C:** rozdělí si ho napůl (a každý se zrychlí o 1/8 hodiny).

13 Nalezněte kořeny rovnice $x^2-3x+2 = 0$. Pak zjistěte přibližně řešení rovnice $x^2-3x+2+\epsilon = 0$ takto: řekněme, že jeden kořen x_1 původní rovnice se malou změnou levé strany také velmi málo posune do $x_1 + \delta$. Dosaďte, vyčíslete levou stranu do prvního řádu a zjistěte vztah mezi δ a ϵ.

14 Podobně řešte rovnici $x^3 + 2x^2 - (5+\epsilon)x - 6 = 0$, víte-li, že při $\epsilon = 0$ má rovnice tři kořeny -1, 2 a -3.