Řešení k počítání do prvního řádu

$\boxed{1}$ **Ad 1.** $2+3\epsilon$; **Ad 2.** $6-3\epsilon+2\delta$; **Ad 3.** 1; **Ad 4.** 2ϵ; **Ad 5.** $25+20\epsilon$.

$\boxed{2}$ Protože do prvního řádu máme $(1+\epsilon)(1-\epsilon)=1$, musí zřejmě být $\frac{1}{1+\epsilon}=1-\epsilon$.

$\boxed{3}$ **Ad 1.** $1+3\epsilon$; **Ad 2.** $1+4\epsilon$; **Ad 3.** $1+n\epsilon$.

$\boxed{4}$ Je-li $\sqrt[n]{1+\epsilon}=1+a\epsilon$, pak po umocnění na n-tou dostaneme rovnost $1+\epsilon=(1+a\epsilon)^n=1+na\epsilon$. Z té už vyjde, že $na=1$, a tedy $a=1/n$. Proto je $\sqrt[n]{1+\epsilon}=1+\epsilon/n$.

$\boxed{5}$ $(1+\epsilon)^\alpha=1+\alpha\epsilon$.

$\boxed{6}$ $(x+\epsilon)^\alpha=x^\alpha(1+\frac{\epsilon}{x})^\alpha=x^\alpha(1+\alpha\epsilon/x)=x^\alpha+\alpha x^{\alpha-1}\epsilon$. Derivace je ten výraz u ϵ, tedy $\alpha x^{\alpha-1}$.

$\boxed{7}$ Je $\sin^2\epsilon+\cos^2\epsilon=\epsilon^2+\cos^2\epsilon=1$. Zde můžeme klidně ϵ^2 vyhodit, protože to už je druhého řádu, a zůstává nám $\cos\epsilon=1$.

$\boxed{8}$ Máme $\sin(x+\epsilon)=\sin x\underbrace{\cos\epsilon}_{1}+\cos x\underbrace{\sin\epsilon}_{\epsilon}=\sin x+\epsilon\cos x$. Derivace sinu je tedy $\cos x$. Obdobně máme i $\cos(x+\epsilon)=\cos x\cos\epsilon-\sin x\sin\epsilon=\cos x-\epsilon\sin x$.

$\boxed{9}$ Je $(27+1)^{1/3}=3(1+\frac{1}{27})^{1/3}=3+3\frac{1}{3\cdot 27}=3+\frac{1}{27}$.

$\boxed{10}$ Mám vlastně trojúhelník o stranách $a=3$, $b=4$ a s úhlem $\gamma=\frac{\pi}{2}+\epsilon$, kde ϵ je velmi malé. Při $\epsilon=0$ bude guma (tj. strana c) mít délku 5. Při o trochu jiném úhlu se ta délka změní o nějaké velmi malé δ. Jak, to zjistíme, když dosadíme naše poznatky do kosinové věty:

$$c^2=(5+\delta)^2=25+10\delta=a^2+b^2-2ab\cos\left(\frac{\pi}{2}+\epsilon\right)=25+24\epsilon.$$

Z toho už máme $\delta=\frac{12}{5}\epsilon$. To je změna délky gumy. Obdobně plocha je dána vztahem $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, takže ta se zas změní na

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\sin(\tfrac{\pi}{2}+\epsilon)=6\cos\epsilon=6$$

a do prvního řádu se nezmění vůbec!

$\boxed{11}$ Označme si těch pět procent jako nějaké malé $\epsilon=0{,}05$. Pak se poloměr zvětší o ϵr a výška se zas o ϵh zmenší. Objem tím přejde na

$$\pi(r+\epsilon r)^2(h-\epsilon h)=\pi r^2h(1+\epsilon)^2(1-\epsilon)=V(1+2\epsilon)(1-\epsilon)=V(1+\epsilon).$$

Objem se tedy zvětší o ϵV, tedy zas o pět procent.

$\boxed{12}$ Začneme rovnou s druhým bodem. Potřebuje-li Pat sám na demolici $3+\epsilon$ hodin, znamená to, že za hodinu zdemoluje $\frac{1}{3+\epsilon}=\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3}\epsilon)=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\epsilon$ chaty. Obdobně Mat za hodinu zvládne zničit $\frac{1}{5+\delta}=\frac{1}{5}-\frac{1}{25}\delta$ chaty. Oba dohromady tedy zničí

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\epsilon-\frac{1}{25}\delta \text{ celé chaty za hodinu,}$$

a proto na demolici celé chaty bude potřeba 1/tolik hodin:

$$\left(\frac{8}{15}-\frac{\epsilon}{9}-\frac{\delta}{25}\right)^{-1}=\frac{15}{8}\left(1-\frac{15\epsilon}{8\cdot 9}-\frac{15\delta}{8\cdot 25}\right)^{-1}=\frac{15}{8}\left(1+\frac{5\epsilon}{24}+\frac{3\delta}{40}\right)=\frac{15}{8}+\frac{25\epsilon}{64}+\frac{9\delta}{64}.$$

To je odpověď k druhému bodu, v níž je rovnou obsažena i odpověď na bod 1: oba dohromady zdemolují chatu za $\frac{15}{8}$ hodiny.

Ad 3. Bez nápoje (tj. při $\epsilon = \delta = 0$) zdemolují chatu za $\frac{15}{8}$ hodiny. Vypije-li nápoj Pat, bude $\epsilon = -\frac{1}{4}$ a $\delta = 0$, takže chatu zdemolují o $\frac{25}{256} \approx 0{,}098$ hodiny rychleji. (Všimněte si, že to, že Pat by sám zdemoloval chatu o čtvrt hodiny rychleji, neznamená, že to zvládnou o čtvrt hodiny rychleji i oba dohromady! Spoustu práce totiž udělá i méně výkonný Mat, který nápoj nevypil). Obdobně vypije-li nápoj Mat, bude $\epsilon = 0$ a $\delta = -\frac{1}{4}$, takže chatu zdemolují o $\frac{9}{256} \approx 0{,}035$ hodiny rychleji (Mat je méně výkonný, takže mu nápoj pomůže méně) a pokud se o něj rozdělí, bude $\epsilon = \delta = -1/8$, tj. demolice proběhne o $\frac{17}{256} \approx 0{,}066$ hodiny rychleji. (Pořád jsme se nedostali k tomu, že by demolice byla o osminu hodiny rychlejší, protože je tu důležité, jak moc *relativně* nápoj toho kterého z nich urychlí, a Pat jakožto ten výkonnější bude urychlen relativně víc než méně výkonný Mat.)

13 Kořeny té původní rovnice jsou 2 a 1. Podle úvahy v úloze máme předpokládat, že když vezmu jeden z těchto kořenů x_1, malá porucha rovnice ho taky změní jen málo na nějaké $x_1 + \delta$. Dosadíme to tedy do porouchané rovnice (tedy té s tím přidaným ϵ) místo x a dostaneme do prvního řádu

$$(x_1 + \delta)^2 - 3(x_1 + \delta) + 2 + \epsilon = \underbrace{x_1^2 - 3x_1 + 2}_{=0} + 2x_1\delta - 3\delta + \epsilon = 0.$$

x_1 je kořen původní rovnice. Proto členy označené svorkou vypadnou a zůstane nám jen vztah $(2x_1 - 3)\delta + \epsilon = 0$. Z toho vyjádříme už $\delta = \frac{\epsilon}{3 - 2x_1}$. Proto se původní kořen $x_1 = 1$ posune do $1 + \epsilon$ a kořen $x_1 = 2$ zas do $2 - \epsilon$.

14 Táž úvaha v bleděmodrém. Zas dosadíme do porouchané rovnice $x = x_1 + \delta$ a upravíme do prvního řádu. Obdržíme

$$x_1^3 + 3x_1^2\delta + 2x_1^2 + 4x_1\delta - (5 + \epsilon)(x_1 + \delta) - 6 = (3x_1^2 + 4x_1 - 5)\delta - x_1\epsilon = 0,$$

přičemž jsme opět vyhodili členy, které tvoří původní rovnici, a také jsme se zbavili součinu $\epsilon\delta$. Dostaneme vztah $\delta = \frac{x_1}{3x_1^2 + 4x_1 - 5}\epsilon$, takže se kořeny posunou následovně:

$$-1 \to -1 + \epsilon/6; \qquad 2 \to 2 + \tfrac{2}{15}\epsilon; \qquad -3 \to -3 - \tfrac{3}{10}\epsilon.$$