1 Aproximujte do prvního řádu konstantní funkci $f(x) = c$. Ukažte, že derivace konstantní funkce je vždy 0.

2 Ukažte, že derivace je *lineární*. Tedy že pokud α a β jsou konstanty, platí $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.

3 Mějme funkce $f(x)$ a $g(x)$. Uvažme jejich součin $F(x) = f(x)g(x)$. Pomocí derivací f a g aproximujte do prvního řádu výraz $F(x+\epsilon)$. Z toho zjistěte derivaci $F'(x)$. Výslednému vztahu se někdy říká *Leibnizovo pravidlo*.

4 Mějme opět funkce $f(x)$ a $g(x)$, ale teď budou vnořené do sebe takto: $F(x) = f(g(x))$. Aproximujte do prvního řádu výraz $F(x+\epsilon)$. Opět zjistěte derivaci F'. Tomuto vztahu se říká *řetězové pravidlo*.

5 Nakonec si dokážeme tzv. *větu o inversní funkci*. Pro každou funkci f máme $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$. Řekněme, že teď budeme naopak považovat x za funkci f. Vyjádřete $\mathrm{d}x$ v závislosti na $\mathrm{d}f$. Zjistěte derivaci takové inversní funkce.

6 Aproximujte do prvního řádu $(x + \epsilon)^\alpha$, kde α je jakákoli reálná konstanta. Zjistěte z toho derivaci funkce x^α.

7 Na tabuli jsme ukázali, že $\sin\epsilon = \epsilon$. Na základě toho zjistěte:

1. čemu je do prvního řádu roven $\cos\epsilon$; **2.** derivace sinu a kosinu v bodě $x = 0$; **3.** derivace sinu a kosinu v jakémkoli bodě (rozepište $\sin(x+\epsilon)$ a $\cos(x+\epsilon)$ podle součtových vzorců).

8 Derivujte $\operatorname{tg} x$ jako součin $\sin x \cdot \frac{1}{\cos x}$. Na druhý činitel použijte řetězové pravidlo. Ukažte, že výsledek lze zapsat buď ve tvaru $\frac{1}{\cos^2 x}$, nebo ve tvaru $1 + \operatorname{tg}^2 x$.

9 Pomocí věty o inversní funkci a předchozích dvou úloh derivujte funkce:

1. $\arcsin x$; **2.** $\arccos x$; **3.** $\operatorname{arc\,tg} x$.

10 Na tabuli jsme rovněž ukázali, že do prvního řádu platí $\ln(1+\epsilon) = \epsilon$. Pomocí toho zjistěte:

1. čemu je rovno $\ln(x+\epsilon)$ a jaká je derivace logaritmu v obecném bodě x;
2. pomocí věty o inversní funkci zjistěte derivaci funkce $\mathbf{e}^x$ v obecném bodě;
3. pomocí této derivace do prvního řádu aproximujte $\mathbf{e}^\epsilon$.

1 Vypočtěte derivace následujících funkcí — měla by Vám stačit pravidla o derivaci součtu a součinu. a a b jsou reálné konstanty.

1. $\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$; **2.** $(x-a)(x-b)$; **3.** $\frac{x-\sin x\cos x}{2}$; **4.** $x^2\sqrt{x}-x\sqrt[3]{x^2}$; **5.** $(1-\sqrt{x})(1+x)$;
6. $-\frac{x}{2}+\frac{1+x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x$; **7.** $(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$; **8.** $x^2\mathrm{e}^x\sin x$;

2 Už víme, že $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$:

1. Pomocí řetězového pravidla spočtěte $\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$, kde $g(x)$ je libovolná funkce.

2. Spočtěte též $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$. (Derivujte jako součin $f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$.)

3 Pomocí pravidla z minulého bodu derivujte následující funkce:

1. $\operatorname{tg} x$; **2.** $\frac{x^2-1}{x^2+1}$; **3.** $\frac{x\ln x}{1+\ln x}$; **4.** $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$; **5.** $\frac{(1-x)^a}{(1+x)^b}$.

4 Pomocí věty o inversní funkci nalezněte derivace následujících funkcí:

1. $\sqrt{x}$; **2.** $\operatorname{arc\,tg} x$ (nápověda: dokažte $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$); **3.** $W(x)$, což je funkce inversní k $x\mathrm{e}^x$.

5 Na tyto příklady už bude potřeba i řetězové pravidlo (derivace složené funkce):

1. $\ln\cos x$; **2.** $2x-(1-x^2)\ln\frac{1+x}{1-x}$; **3.** $\ln(\ln(\ln x))$; **4.** $\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{\cos 2x}{8}$; **5.** $\frac{\cos x}{2\sin^2 x}$;
6. $\operatorname{tg}^4 x-2\operatorname{tg}^2 x-4\ln\cos x$; **7.** $\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{1-x^2}$; **8.** $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$;
9. $\mathrm{e}^{\sin x+\cos x}$; **10.** $2^{\operatorname{tg} x}$; **11.** $\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$; **12.** $x^{(a^a)}+a^{(x^a)}+a^{(a^x)}$.

6 Zkuste také tyto ještě zákeřnější příklady:

1. $\mathrm{e}^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}$; **2.** $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$; **3.** $\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}$;
4. $\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$; **5.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$;
6. $\frac{\arccos x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$; **7.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$.

7 Někdy je zapotřebí funkci před derivováním trochu přepsat. V následujících příkladech se to týká mocnin:

1. x^x. Tady přepište $x^x=\mathrm{e}^{x\ln x}$ a pak derivujte; **2.** $x^{(x^x)}$; **3.** $(\sin x)^{\cos x}$; **4.** $(\ln x)^{\operatorname{tg} x}$.

8 Samozřejmě můžeme derivovat i výrazy obsahující libovolnou funkci. Řekněme, že y je nějaká funkce x; pak můžeme například podle řetězového pravidla psát $(y^2)'=2y\cdot y'$ (y^2 se derivuje na $2y$ a $y(x)$ je vnitřní funkce, která se derivuje na y'). Podobně derivujte i následující výrazy:

1. $x^2\cdot y$; **2.** $y\sin y$; **3.** e^y/y; **4.** y^3+y^2+y.