Hledání extrémů

1 **Ad 1.** V $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ jsou maxima, v $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ jsou minima. **Ad 2.** Derivace je $\frac{bx-2a}{x^3}$, extrém je v $x = 2a/b$. Druhá derivace je v tomto bodě rovna $4a/x^4$ a má tedy stejné znamení jako a. Proto je při kladném a v tomto bodě minimum a při záporném maximum. Na znamení b nezáleží. **Ad 3.** Derivace je $\mathbf{e}^{-x}(1-x)$, jediný extrém je v bodě $x = 1$ a je to maximum ($\mathbf{e}^{-x} > 0$ a $1-x$ je vlevo od jedničky kladné a vpravo záporné). **Ad 4.** Tady je jediný extrém v $x = 0$ a tam zrovna derivace neexistuje! Takže pozor na to. Extrém může být i v bodě, kde derivace neexistuje.

2 Najít globální extrémy znamená, že chceme znát nejvyšší, resp. nejnižší hodnotu dané funkce na nějakém intervalu. To se dá nejsnáz udělat tak, že zjistíme všechny body, kde je derivace nulová, přidáme k nim oba kraje intervalu a spočteme hodnoty funkce ve všech těchto bodech. Největší z nich je pak to maximum a nejmenší zas minimum.

V našem případě máme $f' = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha(1-x)^{\alpha-1} = 0$. Zkrátíme α a máme $x^{\alpha-1} = (1-x)^{\alpha-1}$. Můžeme odmocnit a obdržet $x = 1-x$, tj. uvnitř tohoto intervalu je jediný kandidát na extrém v bodě $\frac{1}{2}$ s hodnotou $2^{-\alpha} + 2^{-\alpha} = 2^{1-\alpha}$. Naopak na krajích intervalu (tj. v $x = 0$ a $x = 1$) je hodnota funkce 1. Při $\alpha > 1$ je hodnota uprostřed menší než ta na krajích, takže skutečně nejmenší hodnota, kterou f na celém intervalu nabývá, je $2^{1-\alpha}$, a největší 1. To je přesně obsah zmíněné nerovnice, která je tím dokázána.

3 Dáme obdélník středem jedné strany do středu půlkruhu a protější dva rohy pak musí být na té kružnici. Je-li základna $2a$ a výška h, bude z Pythagorovy věty $a^2 + h^2 = r^2$. Takže v ploše obdélníka $2ah$ můžeme dosadit $h = \sqrt{r^2 - a^2}$ a derivovat podle a. Vyjde $2a\sqrt{r^2-a^2}\left[\frac{1}{a} - \frac{a}{r^2-a^2}\right]$, to má být 0, takže $a^2 = r^2/2$. Proto pro plochu obdélníka máme $S^2 = 4a^2h^2 = r^4$, tj. $S = r^2$ a plocha půlkruhu je $\pi r^2/2$. Největší obdélník tedy zabírá $2/\pi \approx 63{,}7\,\%$ půlkruhu.

4 Dno má stranu a, výška je h, tj. objem je $V = a^2h$. Z toho můžeme vypočíst $h = V/a^2$. Chceme minimalisovat povrch, tj. plochu dna (a^2) a čtyř stěn (ah). Máme tedy $S = a^2 + 4ah = a^2 + 4V/a$. Derivujme, obdržíme $2a - 4V/a^2 = 0$, tj. $a = \sqrt[3]{2V}$, $h = \sqrt[3]{V/4} = a/2$. Proto musí být výška oproti straně dna poloviční.

Tečny

5 $y - y_0 = k(x - x_0)$.

6 **Ad 1.** $\frac{\pi}{2}$. **Ad 2.** $(x \sin x)' = x \cos x + \sin x$. Dosadíme $x = \frac{\pi}{2}$ a dostaneme $k = 1$. **Ad 3.** Je $y_0 = \frac{\pi}{2} = x_0$, takže po dosazení $y = x$.

7 Obdobně: $y(1) = 1$, $y' = 2x - 1$, takže $k = 1$ a zase máme $y = x$.

8 $\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$.

9 Nejdřív musíme zjistit, kde se protínají. To je např. v bodě $\pi/4$. Ten tedy pro začátek prozkoumejme. Máme $(\sin x)' = \cos x$ a $(\cos x)' = -\sin x$. Víme, že derivace je tangenta úhlu, který graf v daném bodě svírá s vodorovným směrem. Takže graf sinu jde nahoru pod úhlem $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{2}}$ a graf kosinu pod úhlem $-\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{2}}$ (protože kosinus klesá). Úhel mezi nimi je rozdíl obou úhlů, tedy $2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 70{,}5^\circ$.

Přibližné počítání

10 **Ad 1.** Napíšeme to jako $(8+0{,}12)^{1/3} = 2\cdot(1+\frac{0{,}12}{8})^{1/3} = 2\cdot(1+\frac{0{,}12}{3\cdot 8}) = 2+\frac{0{,}12}{12} = 2{,}01$. (Skutečně vyjde 2,009 950..., což se liší jen o 0,000 05 od našeho přibližného!) **Ad 2.** Zapíšeme jako $(5-0{,}1)^{-1} = \frac{1}{5}(1-\frac{0{,}1}{5})^{-1} = \frac{1}{5}(1+\frac{0{,}1}{5}) = \frac{1}{5}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{25} = 0{,}2+0{,}004 = 0{,}204$. **Ad 3.** Položme $\epsilon = 0{,}03$. Pak první odmocninu lze zapsat jako $(1-\epsilon)^{1/3}(1+\epsilon)^{-1/3} = (1-\frac{1}{3}\epsilon)(1-\frac{1}{3}\epsilon) = 1-\frac{2}{3}\epsilon$. Druhá odmocnina je rovna převrácené hodnotě té první, tedy $(1-\frac{2}{3}\epsilon)^{-1} = 1+\frac{2}{3}\epsilon$. Odečteme-li je od sebe, jedničky zmiznou a zůstane $-\frac{4}{3}\epsilon = -0{,}04$.

11 Kořeny té původní rovnice jsou 2 a 1. Podle úvahy v úloze máme předpokládat, že když vezmu jeden z těchto kořenů x_1, malá porucha rovnice ho taky změní jen málo na nějaké $x_1+\delta$. Dosadíme to tedy do porouchané rovnice (tedy té s tím přidaným ϵ) místo x a dostaneme do prvního řádu

$$(x_1+\delta)^2 - 3(x_1+\delta)+2+\epsilon = \underbrace{x_1^2-3x_1+2}_{=0} + 2x_1\delta - 3\delta + \epsilon = 0.$$

x_1 je kořen původní rovnice. Proto členy označené svorkou vypadnou a zůstane nám jen vztah $(2x_1-3)\delta + \epsilon = 0$. Z toho vyjádříme už $\delta = \frac{\epsilon}{3-2x_1}$. Proto se původní kořen $x_1 = 1$ posune do $1+\epsilon$ a kořen $x_1 = 2$ zas do $2-\epsilon$.

12 Táž úvaha v bleděmodrém. Zas dosadíme do porouchané rovnice $x = x_1+\delta$ a upravíme do prvního řádu. Obdržíme

$$x_1^3 + 3x_1^2\delta + 2x_1^2 + 4x_1\delta - (5+\epsilon)(x_1+\delta) - 6 = (3x_1^2+4x_1-5)\delta - x_1\epsilon = 0,$$

přičemž jsme opět vyhodili členy, které tvoří původní rovnici, a také jsme se zbavili součinu $\epsilon\delta$. Dostaneme vztah $\delta = \frac{x_1}{3x_1^2+4x_1-5}\epsilon$, takže se kořeny posunou následovně:

$$-1 \to -1+\epsilon/6; \qquad 2 \to 2+\tfrac{2}{15}\epsilon; \qquad -3 \to -3-\tfrac{3}{10}\epsilon.$$

13 **Ad 1.** Máme $f(x_0+\epsilon) = f(x_0)+\epsilon f'(x_0)$. Otázka zní, jaké máme vzít ϵ, abychom došli do kořene funkce f, tj. aby se vlevo objevila nula. To snadno zjistíme z rovnosti $f(x_0)+\epsilon f'(x_0) = 0$, tj. $\epsilon = -f(x_0)/f'(x_0)$. Nový odhad tedy vznikne tím, že ten starý posuneme o tuto hodnotu a získáme

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Ad 2. Položíme prostě $f(x) = x^2-73$, pak $f'(x) = 2x$ a máme vztah

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2-73}{2x_0} = \frac{1}{2}\left(x_0+\frac{73}{x_0}\right).$$

To teď můžeme používat pořád dokola. Začneme-li například s odhadem x_0 je 8, vyjde nám nový odhad $\sqrt{73} \approx 8{,}562\,5$. Vezmeme-li toto jako nový odhad a opět to dosadíme do našeho vztahu, dostaneme ještě lepší odhad 8,544 024. Zopakujeme-li to ještě třikrát, dostaneme se k výsledku 8,544 003 745 317 53, který je tak přesný, že počítač, který normálně počítá jen asi na 15 desetinných míst, ho dalším použitím této metody už nedokáže zpřesnit.

Ad 3. Máme $f(x) = x-\cos x$, $f' = 1+\sin x$ a dostaneme

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0-\cos x_0}{1+\sin x_0} = \frac{x_0\sin x_0+\cos x_0}{1+\sin x_0}.$$

Použijeme-li jako první odhad $\pi/2$, dostaneme jako druhý $\pi/4$. Za další čtyři cykly dostaneme opět na 15 míst přesnou hodnotu kořene 0,739 085 133 215 160 6.

Finální úlohy

1 Odřízneme-li v každém rohu čtvereček o straně λa ($0 < \lambda < \frac{1}{2}$ — strana odříznutých čtverečků nemůže převyšovat polovinu plechu, pak by se tam všechny nevešly), dostaneme nádobu s výškou λa a čtvercovým dnem o straně $(1-2\lambda)a$. Její objem je tedy $\lambda(1-2\lambda)^2a^3$. Derivujeme podle λ a položíme rovno nule; dostaneme

$$(1-2\lambda)^2 - 4\lambda(1-2\lambda) = 12\lambda^2 - 8\lambda + 1 = 0,$$

což má dva kořeny, $\lambda = \frac{1}{6}$ a $\lambda = \frac{1}{2}$. Máme tedy tři kandidáty na globální extrém: kraje intervalu $\lambda = 0$ a $\lambda = \frac{1}{2}$, v nichž je objem nádoby nulový, a $\lambda = \frac{1}{6}$, kde je roven $\frac{2}{27}a^3$.

2 Řekněme, že trám bude mít strany $2a$ a $2b$, přičemž $a^2 + b^2 = R^2$, kde R je poloměr kmene. Řekněme taky, že třeba $b > a$; pak je nosnost úměrná $8ab^2$. Vyjádříme $b^2 = R^2 - a^2$, čímž obdržíme pro nosnost $8aR^2 - 8a^3$. Derivujeme a položíme rovno nule, vyjde $R^2 - 3a^2 = 0$, takže kratší strana trámu bude $R/\sqrt{3}$ a delší pak $\sqrt{2}R/\sqrt{3}$. Výsledek lze formulovat i tak, že chceme vytesat trám o poměru stran $1 : \sqrt{2}$ (což je mimochodem stejný poměr stran, jako má papír A4 ◡̈).

3 Řešíme podobně jako v předchozí úloze: objem válce je $V = \pi r^2 h$, takže jeho výšku vyjádříme jako $h = V/\pi r^2$. Minimalisujeme povrch $S = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$, derivujeme a položíme rovno nule, čímž obdržíme $4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$. Z toho pak už zjistíme, že $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ a $h = \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2r$. Válec tedy má být stejně vysoký jako široký.

4 Lampa je nad prostředkem stolu, takže mezi ní a krajem stolu máme pravoúhlý trojúhelník o stranách h, r a 1. Z toho jednak vidíme, že $r = \sqrt{1+h^2}$, jednak též vidíme, že $\sin\varphi = \frac{h}{r}$. Tím jsme vyjádřili intensitu pomocí h jako $I = \frac{kh}{(1+h^2)^{3/2}}$. Derivujme, dostaneme $I' = I \cdot \left[\frac{1}{h} - \frac{3}{2}\frac{2h}{1+h^2}\right]$. Položíme-li to rovno nule, dostaneme buď $h = 0$, což je zjevně minimum, nebo $1 + h^2 - 3h^2 = 0$, tj. $h = \sqrt{2}$, což je maximum.

5 Hledáme extrém čtverce vzdálenosti $x^2 + (y-b)^2$, přičemž x a y jsou vázány rovnicí elipsy. Z ní vyjádříme třeba x pomocí y a dostaneme $x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$, takže čtverec vzdálenosti je

$$d^2 = a^2 + \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)y^2 - 2yb + b^2.$$

Extrém bychom mohli najít i bez derivování (jen doplněním na čtverec), ale když už umíme derivovat, tak toho využijme. Dostaneme $-2\frac{a^2-b^2}{b^2}y - 2b = 0$, takže musí být $y = -\frac{b^3}{a^2-b^2}$. Tomu odpovídají dvě možné x-ové souřadnice

$$x^2 = a^2\left(1 - \frac{b^4}{(a^2-b^2)^2}\right) = a^2\frac{a^4 - 2a^2b^2}{(a^2-b^2)^2} \qquad\Longrightarrow\qquad x = \pm\frac{a^2}{a^2-b^2}\sqrt{a^2-2b^2}.$$

6 Celkový objem výtvoru je fixovaný: $V = a^3 + \frac{4\pi}{3}r^3$. My chceme hledat extrém výšky, tj. veličiny $H = a + 2r$. Do toho dosadíme např. $a = \sqrt[3]{V - \frac{4\pi}{3}r^3}$, derivujeme podle r a položíme rovno nule. Vznikne rovnice $\frac{4\pi}{3}r^2 = 2(V - \frac{4\pi}{3}r^3)^{2/3}$. Umocníme na $3/2$ a po přerovnání získáme $r^3 = \frac{V}{\frac{4\pi}{3}\left(1+\sqrt{\pi/6}\right)}$. Dosadíme do prvního vztahu pro objem, získáme $a^3 = V\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}+\sqrt{6}}$. Po dělení lze zjistit, že $\frac{a}{r} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}$.

7 Obvod výseče je prostě φ a stejný je i obvod podstavy kornoutu. Jeho poloměr je tedy dán rovnicí $2\pi r = \varphi$. Z druhé strany taky víme, že poloměr původní výseče (rovný jedné) je po slepení vzdálenost mezi špičkou a obvodem kornoutu. Pro výšku kornoutu h tedy platí Pythagorova věta: $r^2 + h^2 = 1$. Objem kornoutu je roven $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\frac{\varphi^2}{4\pi^2}\sqrt{1-\frac{\varphi^2}{4\pi^2}} = \frac{1}{24\pi^2}\varphi^2\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}$. Derivujeme a položíme rovno nule, dostaneme $V\left[\frac{2}{\varphi} - \frac{1}{2}\frac{2\varphi}{4\pi^2-\varphi^2}\right] = 0$. Závorka se bude rovnat nule při $\varphi = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$, a při tomto úhlu nastává maximum objemu $\frac{\pi^2}{3\sqrt{3}}$.

8 Auto se nejlíp vytočí tak, že jeden jeho bod bude přímo v rohu odbočky. Pokud s krajnicí svírá úhel φ, může být ta část, která je v širší silnici, mít nejvýše délku $\frac{a}{\cos\varphi}$, a ta, která je v užší, nejvýše $\frac{b}{\sin\varphi}$. Celkem tedy maximální délka auta, které svírá s krajnicí úhel φ, je $\frac{a}{\cos\varphi} + \frac{b}{\sin\varphi}$. Derivujme a položíme rovno nule, tím dostaneme rovnici $a\sin^3\varphi = b\sin^3\varphi$, a tak získáme $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. Dosadíme-li to zpět do $\frac{a}{\cos\varphi} + \frac{b}{\sin\varphi}$, dostaneme po použití vztahů $\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$ a $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$ a nějakých úpravách vztah $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$.

Poznamenejme ještě, že tohle je *minimum*. Auto totiž musí při zatáčení projet postupně všemi úhly od $\pi/2$ až do nuly, a pokud by jeho délka přesáhla toto minimum, někde by vyjelo ze silnice.

9 První hyperboly mají rovnici $y_1 = \sqrt{x^2-a}$, druhé $y_2 = b/x$. Derivujme: $y_1' = \frac{x}{\sqrt{x^2-a}}$ a $y_2' = -\frac{b}{x^2}$. Kde je průsečík těchto dvou křivek? Tam, kde se rovnají obě souřadnice. Bude se tedy rovnat $y_1 = y_2$, a proto má být $b/x = \sqrt{x^2-a}$. Dáme na druhou a máme $x^2 - a - b^2/x^2 = 0$, takže průsečík má splnit rovnici $x^4 - ax^2 - b^2 = 0$.

Z druhé strany: rozdíl úhlů musí být $\frac{\pi}{2}$, takže má být

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = „\infty“,$$

protože chceme dokázat, že jsou na sebe kolmé. Abychom dostali nekonečno, musí se $1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 0$ vynulovat. Místo tangent dosadíme ty derivace a mělo by být

$$1 - \frac{b}{x\sqrt{x^2-a}} = 0.$$

To už přepíšeme snadno na $x\sqrt{x^2-a} = b$ a po umocnění dostáváme tu samou rovnici $x^4-ax^2-b^2 = 0$. Ta je v průsečíku splněna a proto jsou obě křivky na sebe kolmé.

10 V bodě x je derivace $-1/x^2$, takže tečna musí být $y - 1/x_0 = -\frac{1}{x_0^2}(x-x_0)$. Průsečík s osou x je tam, kde je $y = 0$, tj. při $x - x_0 = x_0$, tedy v $x = 2x_0$. Naopak průsečík s osou y je tam, kde je $x = 0$, což je v bodě $y = 2/x_0$. Je tedy vidět, že plocha trojúhelníka je konstantní a rovna 2.

11 **Ad 1.** Derivace je $\mathbf{e}^x(1+x)$. Jelikož $\mathbf{e}^x > 0$, je derivace záporná při $x < -1$, kladná při $x > -1$ a nulová při $x = -1$. Proto je extrém v $x = -1$. Vlevo od něj je funkce klesající, vpravo je rostoucí, jde tedy o minimum. **Ad 2.** Při hodně velkém x funkce roste mega moc rychle (ještě rychleji než exponenciála). Při velkém záporném je $\mathbf{e}^x$ velmi blízko nule a hodnota je strašně malá záporná. V nule je nula. **Ad 3.** Kreslíme zleva: skoro vodorovnou čáru těsně pod x-ovou osou, pak dolík v bodě $[-1; -1/\mathbf{e}]$. Pak už funkce roste, prochází nulou pod úhlem 45° a pak roste mega moc rychle.