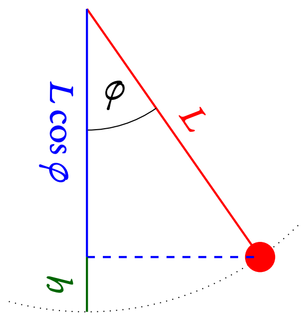
O matematickém kyvadle a proč potřebujeme rozvoje



Zatím jsme vlastně neviděli žádný opravdu pádný důvod, proč by nás měl zajímat Taylorův rozvoj. Všechno, co jsme zatím počítali, jsme dokázali udělat „přesně“, bez aproximací. Ale brzo se dostaneme k integrálům a diferenciálním rovnicím a tam už se často bez odhadů a šikovného zanedbávání neobejdeme. Chtěl bych ukázat jeden celkem prostý příklad tohoto jevu.

Mějme matematické kyvadlo, tj. hmotný bod o hmotnosti m zavěšený na nehmotné tyčce délky L, která se může volně otáčet kolem svého závěsu (viz obrázek). Výchylku kyvadla popisujme úhlem φ. Řekněme, že kyvadlo vychýlíme o $\varphi_{\max}$ a pak ho volně pustíme. Naším úkolem bude zodpovědět zdánlivě prostou otázku: *jaká bude perioda kmitů kyvadla?*

Možná si říkáte: vždyť takové kyvadlo je přece hrozně primitivní systém, to musí být triviální. Dáme-li se ale do počítání, rychle zjistíme, že to tak vůbec není.

Vyjděme ze zákona zachování energie: kyvadlo opisuje oblouk kružnice o poloměru L, takže pokud se výchylka změní o $\mathrm{d}\varphi$, kyvadlo projde dráhu $L\mathrm{d}\varphi$. Okamžitá rychlost kyvadla je tedy $v = L\dot{\varphi}$. Z obrázku je také vidět, že výška kyvadla nad nejnižším bodem bude $h = L(1 - \cos\varphi)$. Proto, dáme-li nulovou hladinu potenciální energie do nejnižšího bodu, bude potenciální energie rovna $mgh = mgL(1 - \cos\varphi) = 2mgL\sin^2\frac{\varphi}{2}$. Celková energie kyvadla v obecném bodě jeho dráhy tedy bude $E = \frac{1}{2}mL^2\dot{\varphi}^2 + 2mgL\sin^2\frac{\varphi}{2}$, a jelikož se energie zachovává, musí tato veličina být pořád stejná, jako byla na začátku, když jsme volně vypustili ($v = 0$) kyvadlo z výchylky $\varphi_{\max}$. Tehdy byla kinetická energie nulová a potenciální byla $2mgL\sin^2\frac{\varphi_{\max}}{2}$. Máme tedy rovnici

$$\frac{1}{2}mL^2\dot{\varphi}^2 + 2mgL\sin^2\frac{\varphi}{2} = 2mgL\sin^2\frac{\varphi_{\max}}{2}.$$

Pokrátíme, co jde, a vyjádříme $\dot{\varphi}^2$, čímž obdržíme

$$\dot{\varphi}^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{4g}{L}\left(\sin^2\frac{\varphi_{\max}}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

Nyní můžeme odmocnit, což dá $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \pm 2\sqrt{\frac{g}{L}}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_{\max}}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}$. Násobme obě strany rovnice $\mathrm{d}t$ a dělme je tou velkou odmocninou. Tím přepíšeme rovnici na tvar

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_{\max}}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = \pm 2\sqrt{\frac{g}{L}}\,\mathrm{d}t.$$

Tento tvar se vyznačuje tím, že úhel φ se vyskytuje jen vlevo a čas t zas pouze vpravo. Můžeme tedy obě strany rovnice integrovat. Ze zákona zachování energie vyplývá, že kyvadlo bude symetricky kmitat mezi dvěma krajními polohami $\pm\varphi_{\max}$. Proto čas, který je potřeba na to, aby kyvadlo z krajní polohy dospělo doprostřed, musí být roven čtvrtině periody, tj. $T/4$. Proč? Protože celá perioda je tvořena tímto pohybem, pak dalším pohybem ze středu na druhý kraj (ten je opačný, ale zabere stejný čas), a pak ještě tím vším zas pozpátku (to je ještě dvakrát tolik času navíc).

Proto platí, že pokud vlevo integrujeme od krajní výchylky $\varphi_{\max}$ až do nuly (tj. středu), vpravo se naintegruje $T/4$, kde T je hledaná perioda. Meze při integraci úhlu prohodíme — kvůli odmocnění je znamení nejednoznačné (máme tam „$\pm$“), ale perioda by zřejmě měla být kladná. Proto musí být

$$\int_0^{\varphi_{\max}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_{\max}}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}\,T.$$

To už je vlastně řešení naší úlohy; zbývá vyjádřit T. Ale musíme ještě spočítat ten integrál. Proto v něm položíme $\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi_{\max}}{2}u$, kde u bude nová proměnná integrace. Meze pak půjdou od 0 do 1 a pro diferenciály bude platit $\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \sin\frac{\varphi_{\max}}{2}\,\mathrm{d}u$. Odtud musíme vyjádřit $\mathrm{d}\varphi$. Bohužel bude též nutné zapsat $\cos\frac{\varphi}{2}$ jako $\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_{\max}}{2}u^2}$, takže bude $\mathrm{d}\varphi = \dfrac{2\sin\frac{\varphi_{\max}}{2}\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_{\max}}{2}u^2}}$. Dosadíme to do integrálu a konečně máme (úpravy si zkuste kdyžtak ověřit sami:)

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_{\max}}{2}u^2}}.$$

No a problém je na světě. Ten integrál vpravo je totiž nad naše síly — a nejen nad naše, ale i nad síly kohokoli jiného, což je všeobecně známo. Tento problém matematici v XVIII. a XIX. století vyřešili „šalomounsky“ — když integrál neumíme spočítat, vymyslíme pro něj nový název a označení a pokusíme se aspoň prostudovat jeho vlastnosti, jak nejlépe to půjde. Tento konkrétní integrál se jmenuje *úplný eliptický integrál prvního druhu* a označili bychom ho $\boldsymbol{K}(\sin\frac{\varphi_{\max}}{2})$. Každopádně na to, abychom se studiem této funkce zabývali, nemáme prostředky, a stejně: my chceme nějaké konkrétní číselné výsledky, ne abstraktní vzorce! Tak kde je seženeme?

Na pomoc přijde Taylorův rozvoj. Předpokládejme pro jednoduchost, že výchylka $\varphi_{\max}$ je celkem malá, a zkusme se aspoň podívat, co dokážeme říct pro takový případ. Už známe rozvoj pro odmocninu:

$$\frac{1}{\sqrt{1+z}} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}z^2 - \cdots,$$

což platí pro z v jistém okolí nuly, tedy pro z dosti malé. Proto bychom určitě mohli podle tohoto pravidla rozvinout i tu protivnou odmocninu $1/\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_{\max}}{2}u^2}$. Tím dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_{\max}}{2}u^2}} = 1 + \sin^2\frac{\varphi_{\max}}{2}\frac{u^2}{2} + \sin^4\frac{\varphi_{\max}}{2}\frac{3u^4}{8} + \cdots$$

Je-li výchylka rozumně malá, bude ten čtverec sinu opravdu titěrný, a čtyřmoc tím spíš. Proto bychom vlastně mohli říct, že při malých výchylkách vlastně tu odmocninu můžeme celkem přesně nahradit jedničkou. Pak nám zůstane mnohem jednodušší integrál $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$, který je roven $\pi/2$. Dostáváme tedy jednoduchý výsledek pro malé výchylky:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

To asi znáte ze střední školy. Je vidět, že tady perioda vůbec nezáleží na výchylce. Ale to není divu, když jsme veškerý vliv počáteční výchylky zanedbali!

Co kdyby výchylka byla o něco větší? Pak už by tahle primitivní aproximace tak dobře nefungovala. Ale můžeme si pomoci: prostě vezmeme další člen rozvoje, takže dostaneme

$$T \approx 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^1 \frac{1+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_{\max}}{2}u^2}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\left[\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_{\max}}{2}\int_0^1 \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}\right].$$

Vidíme, že levý integrál v hranaté závorce je zas ten stejný jako předtím a zas dostaneme $\pi/2$. Opět tedy máme řešení $2\pi\sqrt{L/g}$, ale k tomu se přičte jakási oprava ve formě druhého integrálu. Ten je mírně, ale ne o moc složitější než ten první a vyjde $\pi/4$. Proto dostaneme zpřesněný výsledek:

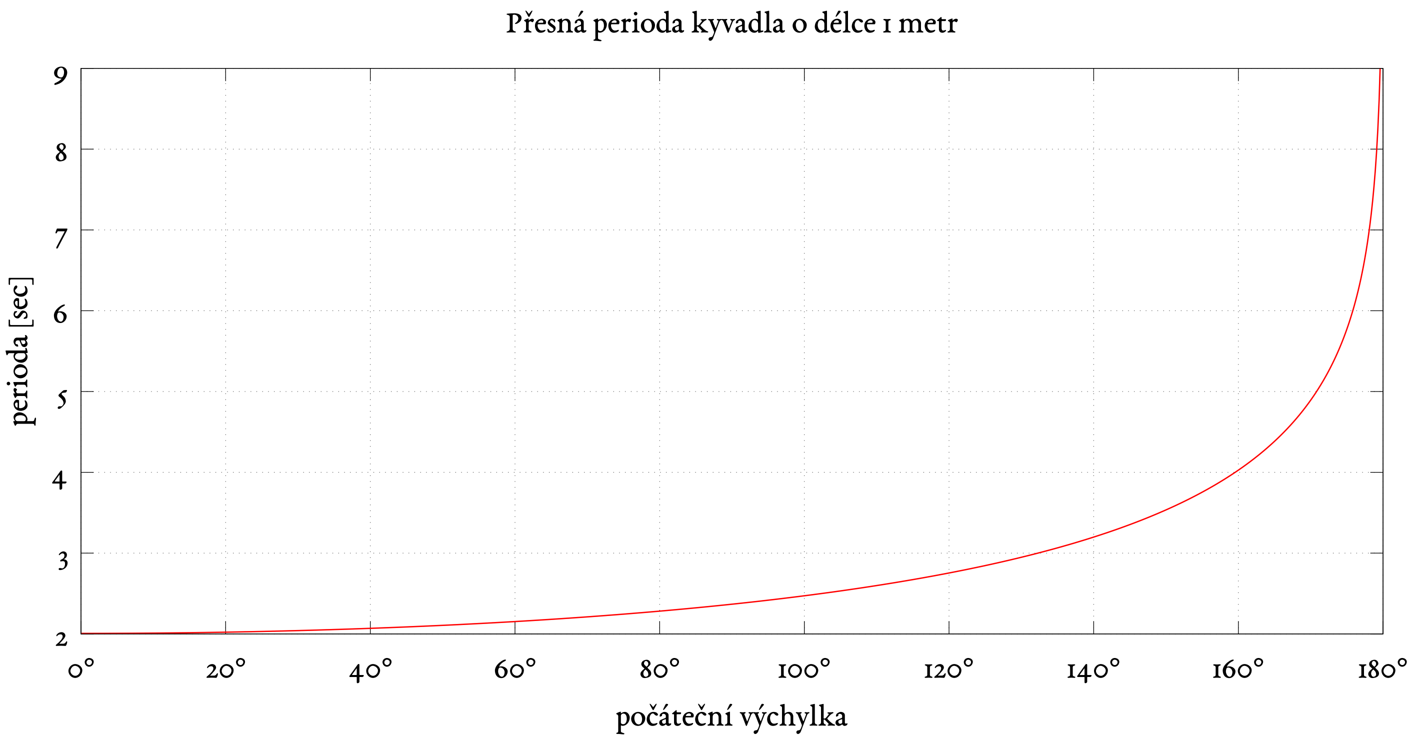
$$T \approx \sqrt{\frac{L}{g}}\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\sin^2\frac{\varphi_{\max}}{2}\right).$$

A co kdyby ani tahle přesnost nestačila? Zas můžeme přidat další člen rozvoje a do hranaté závorky přibude ještě $\frac{3}{8}\sin^4\frac{\varphi_{\max}}{2}\int\limits_0^1\frac{u^4\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$. Integrál je zas o něco protivnější než ten předchozí a vyjde $3\pi/16$. Díky tomu můžeme výsledek ještě víc zpřesnit na

$$T \approx \sqrt{\frac{L}{g}}\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\sin^2\frac{\varphi_{\max}}{2} + \frac{9\pi}{64}\sin^4\frac{\varphi_{\max}}{2}\right),$$

a tak bychom mohli klidně pokračovat i dál a doplnit si tolik členů, kolik bychom jen chtěli.

Abychom měli lepší představu o tom, co jsme to vlastně spočítali, přiložím pár grafů. Nejdřív ukažme, jak vypadá úplně přesné řešení s eliptickým integrálem, tedy $T = 4\sqrt{L/g}\,\boldsymbol{K}(\sin\frac{\varphi_{\max}}{2})$, pokud dáme pro jednoduchost závěs o délce 1 metr. Obdržíme takovouto závislost:



Také si můžeme pro porovnání vygrafovat tuto funkci spolu s našimi třemi postupnými aproximacemi. Levý graf ukazuje přímo přesně a přibližně vypočtené periody, v pravém je vidět, jaké chyby se naší aproximací dopouštíme. Opět vidíme, jak každý další člen naši aproximaci silně zlepšuje.