1 Aproximujte následující funkce do *druhého* řádu, je-li x velmi malé oproti jedné:

1. $\ln(1-x)\sin x$; **2.** $\frac{e^{-x}}{1+x}$; **3.** $\frac{1}{x}\ln(1+x)$; **4.** $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{(a+x)^2}$; **5.** Zde počítejte do x^3: $\frac{\sin x}{\cos x}$.

2 **Bez použití Taylorova vzorce** rozviňte následující funkce v řady kolem $z=0$:

1. $e^{-k^2z^2}$; **2.** $\sqrt{2+z}$; **3.** $1+\ln(1+z)$; **4.** $\frac{1}{z}\ln(1-z)$; **5.** $\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}$; **6.** $\frac{1}{4}(e^z+e^{-z}+2\cos z)$; **7.** $\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$.

3 Napište řadu pro e^{ix} (zde $i^2=-1$ je imaginární jednotka). Oddělte reálnou a imaginární část. Přesvědčte se, že reálnou část tvoří řada pro $\cos x$ a imaginární zas řada pro $\sin x$. Tím dokažte vzorec $e^{ix}=\cos x+i\sin x$.

4 Rozložte v řadu kolem $x=0$ následující funkce:

1. $\frac{1}{2-x-x^2}$; **2.** $\frac{1}{1-x^2}$; **3.** $\frac{1}{(x+1)(x-3)^2}$; **4.** $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

5 Díky rozvojům dokážeme i vyšetřit chování funkcí pro hodně *velké* x. Prostě využijeme toho, že když je x hodně velké, pak $1/x$ je hodně malé. V následujících příkladech počítejte do $1/x^2$:

1. $\sqrt{(x+a)(x+b)}-x$; **2.** $\frac{1}{1+x}$; **3.** $\sqrt[3]{x^2+a^2}-\sqrt[3]{x^2-a^2}$; **4.** $x\ln(1+\frac{1}{x})$;
5. $(1+\frac{1}{x})^x$ (zapište to jako exp ln té funkce).

6 Rozvoje se dají i násobit mezi sebou jako polynomy — každý člen s každým. Pro konečný počet sčítanců jste si to zkusili už v první úloze. Teď to zkuste pro celé nekonečné rozvoje.

1. Napište rozvoje pro $\sin^2 x$ a $\cos^2 x$ a sečtěte je. Měli byste dostat jedničku.

2. Napište rozvoj pro funkci $\left[\frac{\ln(1+z)}{z}\right]^2$.