K Taylorovi

1 Píšu nejdřív úplný rozvoj pomocí sumy, za ním jen prvních pár členů až do z^2:

1. $\mathrm{e}^{-k^2z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{k^{2n}z^{2n}}{n!} = 1 - k^2z^2 + \cdots;$

2. $\frac{1}{2+z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}z^2 + \cdots;$

3. $1 + \ln(1+z) - \mathrm{e}^z = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = -z^2 + \cdots;$

4. $\frac{\ln(1-z)}{z} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n+1} = -1 - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{3} - \cdots;$

5. $\frac{1}{4}(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} + 2\cos z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{4n}}{(4n)!} = 1 + \cdots;$

6. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1} = z + \cdots;$

2 **1.** $-x^2 + \cdots;$ **2.** $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots;$ **3.** $(1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots)(1 - x + x^2 + \cdots) = 1 - 2x + \frac{5}{2}x^2 + \cdots;$
4. $\frac{2x}{a^3} - \frac{3x^2}{a^4} + \cdots;$ **5.** $x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots.$

3 **1.** 0 (první člen je až $\frac{2}{3}a^2/x^{4/3}$); **2.** $\frac{a+b}{2} - \frac{(a-b)^2}{8x} + \cdots;$ **3.** $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \cdots;$
4. $\exp(1 - \frac{1}{2x} + \cdots) = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2x} + \cdots;$

4 **1.** Máme $\frac{1}{2+z} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{z}{4} + \cdots - \frac{1}{2} = \frac{z}{4} - \cdots$, takže když to podělíme z, dostaneme výsledek limity $1/4$.
2. $-1;$ **3.** $\frac{a+b}{2};$ **4.** Tohle je trochu zrada, protože tady ten rozvoj v hranaté závorce začíná od $x^{-4/3}$. Takže po násobení dalšími $x^{-4/3}$, takže celkem to začíná $x^{-8/3}$ atd. Když x jde do nekonečna, je výsledkem nula.

5 Viz bod 1, kde jsou všechny rozvoje vypsány.

6 **1.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)\frac{x^n}{3};$ **2.** $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n};$ **3.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4n+7}{3^{n+2}} + (-1)^n\right)\frac{x^n}{16};$
4. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^{n+1}}\right)x^n.$

7 **1.** Tohle už je docela obtížná úloha. Nejdřív se podívejme na to, jak z rozvoje pro $\sin x$ udělat $\sin^2 x$. Prostě napíšeme dva rozvoje pro $\sin x$ a přenásobíme je mezi sebou takto:

$$\sin^2 x = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^\ell\frac{x^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^{k+\ell}\frac{x^{2k+2\ell+2}}{(2k+1)!(2\ell+1)!}.$$

V tom přejdeme k nové proměnné $p = k + \ell$. Je-li tento součet fixovaný, znamená to, že k pak může už běžet jen od nuly (to je jeho nejmenší hodnota vůbec) až po p (víc ne, protože ℓ taky nemůže být záporné). Takže přepíšeme sumu na toto (přitom všude dáváme $\ell = p - k$):

$$\sin^2 x = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p x^{2p+2} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{(2k+1)!(2p-2k+1)!}.$$

Vnitřní zlomek rozšíříme $(2p+2)!$ a přečíslujeme členy tak, že nebudeme sčítat přes p, ale přes $r = p+1$. Pak r začíná od jedničky a máme

$$\sin^2 x = -\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r x^{2r} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(2r)!}{(2k+1)!(2r-2k-1)!} = -\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r x^{2r} \sum_{k=0}^{r-1} \binom{2r}{2k+1}.$$

Pro kosinus na druhou zcela obdobným přístupem dostaneme

$$\cos^2 x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} \sum_{k=0}^{p} \binom{2p}{2k}.$$

Sečteme to. Máme pouze sudé mocniny a absolutní člen je pouze v $\cos^2 x$; odtamtud dostaneme 1. Máme tedy toto:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{x^{2r}}{(2r)!} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k \binom{2r}{k}.$$

Ale vnitřní suma se dá podle binomické věty zapsat jako $(1-1)^{2r} = 0$, takže celá dvojitá suma vypadne a zůstane jen jednička. Tak to má být.

2. $\left[\frac{\ln(1+z)}{z}\right]^2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n H_{n+1} \frac{z^n}{2n+4}$, kde $H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}$ je součet převrácených hodnot prvních k přirozených čísel.

9 Obdrží se následující:

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \cdots + \sin n\varphi = \sin\left(\frac{k+1}{2}\varphi\right) \frac{\sin\frac{k\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}};$$

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi = \cos\left(\frac{k+1}{2}\varphi\right) \frac{\sin\frac{k\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

11 Máme

$$\ln(1+\mathrm{i}t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\mathrm{i}^n z^n}{n},$$

takže bereme-li imaginární část, zůstanou jen ty členy, kde je $\pm\mathrm{i}$, tj. ty, kde je lichá mocnina i. To jsou zřejmě členy s n lichým. Nakonec nezapomeneme na to, že se budou střídat znamení, protože $\mathrm{i}^2 = -1$, a obdržíme

$$\mathfrak{Im} \ln(1+\mathrm{i}t) = \operatorname{arc\,tg} t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}.$$

12 **1.** Stačí udělat ten výpočet, který se tam píše.

2. Při $-\pi < \varphi < \pi$ je $\cos\frac{\varphi}{2}$ kladný. Proto je argument toho čísla $2\cos\frac{\varphi}{2}\mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi/2}$ roven prostě $\varphi/2$.

3. Máme

$$\ln\left(1+e^{i\varphi}\right) = \ln\left|2\cos\frac{\varphi}{2}\right| + i\frac{\varphi}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{in\varphi}}{n}.$$

Takže oddělíme imaginární část a dostaneme to, co se píše v zadání.

4. Úplně obdobně dostaneme

$$\ln\left(1-e^{i\varphi}\right) = \ln[e^{i\varphi/2}(-2i\sin\frac{\varphi}{2})] = \ln\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right| - i\frac{\pi-\varphi}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\varphi}}{n}.$$

Toto platí při $0<\varphi<2\pi$, protože sinus poloviny úhlu je kladný právě pro tyto úhly. Máme tedy

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+e^{i\varphi}}{1-e^{i\varphi}} = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right| + i\frac{\varphi}{2} + i\frac{\pi-\varphi}{2}\right].$$

Imaginární část je tedy pořád $\pi/4$ zcela nezávisle na φ. Stačí od sebe oba rozvoje odečíst, vzít imaginární část a dostaneme žádané.

Limity

1	**1.** 1;	**2.** $\frac{a}{b}$;	**3.** e;	**4.** $\frac{1}{2}$.		
2	**1.** $\frac{1}{a}$;	**2.** $\frac{1}{2}$;	**3.** $-\frac{1}{12}$;	**4.** 3;	**5.** $\frac{3}{2}$;	**6.** $\frac{a^2}{b^2}$.
3	**1.** e;	**2.** $\frac{a+b}{2}$;	**3.** 2.			
4	**1.** $\frac{4}{3}$;	**2.** $\frac{1}{\sqrt{2a}}$;	**3.** $\frac{m-n}{2}$;	**4.** $\frac{1}{a}$.		