Technické věci

1 V naší definici integrálu $\int_a^b \mathrm{d}f = f(b) - f(a)$ použijte následující pravidla pro diferenciály:

1. $\mathrm{d}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathrm{d}f + \beta \mathrm{d}g$ (kde α, β jsou konstanty) a dokažte tím linearitu integrálu;

2. $\mathrm{d}(fg) = f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f$. Vyjádřete $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ a odvoďte pravidlo per partes;

3. $\mathrm{d}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$ a odvoďte pravidlo o substituci.

2 Vysvětlete pomocí naší definice, proč se při prohození mezí změní znaménko integrálu.

Počítání

3 Vypočtěte: **1.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$; **2.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos x\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int_0^5 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$; **4.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$; **5.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

4 S pomocí lineární substituce vypočtěte následující integrály (a je konstanta):

1. $\displaystyle\int_a^{2a} \frac{\mathrm{d}x}{x+a}$; **2.** $\displaystyle\int_0^1 (2x-3)^{10}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int_0^{2/5} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-5x}}$; **4.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$; **5.** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{a/b}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a-bx^2}}$ $(a > b > 0)$;

5 Ukažte, že pro libovolnou (dost slušnou) funkci f platí $\displaystyle\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right|$. Pak díky tomu vypočtěte integrály: **1.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2-4}$; **2.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x^2-1}{x^3-x+7}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$; **4.** $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+2}$.

6 Pomocí rozkladu v parciální zlomky vyčíslete následující integrály:

1. $\displaystyle\int_2^5 \frac{\mathrm{d}x}{2-x-x^2}$; **2.** $\displaystyle\int_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$; **3.** $\displaystyle\int_{-5}^{-3} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-3)^2}$; **4.** $\displaystyle\int_4^5 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.