První písemka

1. Písemka je na 30 minut. **Během prvních sedmi minut si musíte vybrat dvě úlohy, které budete řešit, ostatní mi vrátíte!**
2. Z celé písemky můžete získat max. 2 body.

Pište prosím VŽDY postupy! Hodnotím primárně postup, ne výsledek. U složitějších úvah se prosím zkuste vyjadřovat v celých větách.

---

1 Co nejvíc upravte výraz $\dfrac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1-\sqrt{4x^2+1}}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(x-\sqrt{x^2+1-\sqrt{4x^2+1}}\right)^2}$. **[1 bod]**

---

2 Každý trojúhelník se stranami a, b, c a úhly α, β, γ musí splnit kosinovou větu: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Označme $s = \frac{a+b+c}{2}$.

1. Ukažte, že platí $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ a $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$. **[½ bodu]**

2. Pro plochu trojúhelníka platí $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$. Použijte vztahy získané v předchozím bodě a odvoďte z toho *Heronův vzorec* $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. **[½ bodu]**

---

3 Ve starém Egyptě zlomky nezapisovali ve tvaru $\frac{a}{b}$ jako my; místo toho všechny zlomky mezi 0 a 1 psali jako součet zlomků ve tvaru $1/n$ (pro $n \geq 2$ přirozené). Ale každý takový zlomek se směl použít jen jednou. Takže např. číslo $\frac{2}{3}$ se nepsalo jako $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$, ale třeba jako $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$.

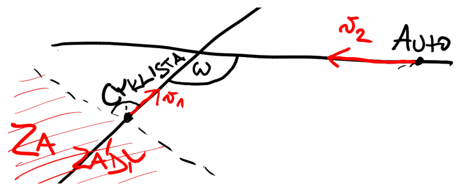
1. Dokažte, že každý zlomek $\frac{1}{n}$ lze zapsat také jako $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$. **[½ bodu]**

2. Zapište tato čtyři čísla jako součet různých zlomků $1/n$ ($n \geq 2$ přirozené): $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{9}$; 1. **[1 bod celkem]**

3. Dokažte, že jedno a totéž číslo může mít několik různých zápisů v tomto tvaru a že zápis tedy není jednoznačný. (**Nápověda:** Zkuste najít např. druhý způsob, jak zapsat číslo $\frac{2}{3}$. Viz bod 1.) **[½ bodu]**

---

4 Dvě rovné silnice se křižují pod úhlem ω. Po každé z nich jede konstantní rychlostí vozidlo.



1. Ukažte, že vidí-li řidič jednoho vozidla to druhé vozidlo stále ve stejném směru, obě vozidla se srazí. **[1 bod]**

2. Křižovatky s malým ω mohou být nebezpečné pro cyklisty, protože to auto, které je podle bodu 1 srazí, může být celou dobu za jejich zády. Jaký aspoň musí být úhel ω, aby se to nestalo? Počítejte, že cyklisté jezdí rychlostí v_1, auta rychlostí v_2 a za zády cyklisty je vše, co se od směru jeho jízdy odchyluje víc než o 90° vlevo či vpravo (viz obrázek). **[1 bod]**

---

5 Dokažte, že platí $4\cos a\cos b\cos c = \cos(a+b+c)+\cos(a+b-c)+\cos(b+c-a)+\cos(c+a-b)$. **Nápověda:** Využijte Eulerův vzorec $\cos x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$. **[1 bod]**

---

6 Mějme v komplexní rovině trojúhelník s vrcholy v bodech (tj. komplexních číslech) A, B a C. Označíme v tomto trojúhelníku jako obvykle délky stran a, b, c a úhly α, β, γ. Ukažte, že platí

$$\frac{B-A}{A-C} = -\frac{c}{b}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}, \qquad \frac{C-B}{B-A} = -\frac{a}{c}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}, \qquad \frac{A-C}{C-B} = -\frac{b}{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma},$$

a pomocí těchto vzorců dokažte, že součet úhlů v každém rovinném trojúhelníku je roven π. **[2 body]**