Řešení druhé písemky

První úloha

1 Derivujte $f(x) = \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. Výsledek co nejvíce upravte. [1 bod]

Rozepíšeme $\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$ na $2\ln(x-1) - \ln(x^2+x+1)$ a derivujeme. Obdržíme

$$f' = \frac{1}{6}\frac{2}{x-1} - \frac{1}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2/\sqrt{3}}{1+\frac{(2x+1)^2}{3}}.$$

První dva zlomky dáme na společného jmenovatele a užijeme pravidlo $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$. Tím se ve jmenovateli objeví $x^3 - 1$. Vpravo sešikujeme odmocniny a získáme

$$f' = \frac{1}{6}\frac{2x^2+2x+2-(2x^2-x-1)}{x^3-1} + \frac{2}{3}\frac{1}{1+\frac{(2x+1)^2}{3}} = \frac{1}{2}\frac{x+1}{x^3-1} + \frac{2}{3+4x^2+4x+1}.$$

V pravém zlomku jmenovatel přepíšeme na $4x^2+4x+4$, dvojku zkrátíme a obdržíme $\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}$. Podle pravidla o $a^3 - b^3$ můžeme rozšířit $x-1$ a získáme

$$f' = \frac{1}{2}\frac{x+1}{x^3-1} + \frac{1}{2}\frac{x-1}{x^3-1} = \frac{x}{x^3-1}.$$

Druhá úloha

2 Aproximujte do prvního řádu následující výrazy, považujeme-li ϵ za velmi malé oproti jedné:

1. $\frac{\sqrt{3+\epsilon}}{1-\epsilon}\mathrm{e}^{-\epsilon}$ [¼ **bodu**]; **2.** $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2+3\epsilon}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2-3\epsilon}}\right)$ [¼ **bodu**].

Dále nalezněte rovnici tečny ke grafu funkce: [¼ **bodu každá**]

3. $f(x) = \frac{\sqrt{3-2x}}{1+2x}\mathrm{e}^{2x}$ v bodě $x = 0$; **4.** $g(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+2x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3-2x}}\right)$ v bodě $x = \frac{1}{2}$.

Budeme tu často potřebovat, že do prvního řádu platí $(1+\epsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\epsilon$.

Ad 1. Podle tohoto pravidla přepíšeme $\sqrt{3+\epsilon}$ na $\sqrt{3}(1+\frac{1}{3}\epsilon)^{1/2} \approx \sqrt{3}(1+\frac{1}{6}\epsilon)$. Pak už máme obdobně $\frac{1}{1-\epsilon} \approx 1 + \epsilon$ a nakonec též

$$f(x+\epsilon) \approx f(x) + f'(x)\epsilon \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{e}^{\epsilon} \approx \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0\epsilon = 1 + \epsilon.$$

Proto je $\mathrm{e}^{-\epsilon} \approx 1 - \epsilon$. Dáme to dohromady a máme do prvního řádu

$$\sqrt{3}(1+\frac{1}{6}\epsilon)\underbrace{(1+\epsilon)(1-\epsilon)}_{1} \approx \sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\epsilon.$$

Ad 2. Nejdřív do prvního řádu upravíme vnitřek arkustangenty. Obdržíme

$$2^{-1/3}\left[\left(1+\frac{3}{2}\epsilon\right)^{-1/3} - \left(1-\frac{3}{2}\epsilon\right)^{-1/3}\right] = 2^{-1/3}(1 - \tfrac{1}{2}\epsilon - 1 - \tfrac{1}{2}\epsilon) = -2^{-1/3}\epsilon.$$

Zároveň máme do prvního řádu $\sin\epsilon = \epsilon$ a $\cos\epsilon = 1$. Proto je též $\operatorname{tg}\epsilon = \frac{\sin\epsilon}{\cos\epsilon} = \epsilon$, a z toho vidíme, že je též $\epsilon = \operatorname{arc\,tg}\epsilon$. Proto je výsledek

$$\operatorname{arc\,tg}(-2^{-1/3}\epsilon) = -2^{-1/3}\epsilon.$$

Ad 3. Chceme-li rovnici tečny, potřebujeme zjistit chování funkce okolo bodu $x = 0$. Ale to už známe z prvního bodu. Položme prostě $\epsilon = -2x$ a obdržíme

$$f(x) \approx \sqrt{3} - \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Toto platí jen v malém okolí bodu $x = 0$, ale tím přesně dostáváme kousek úsečky, který se grafu funkce v tom bodě dotýká. Proto $y = \sqrt{3} - x/\sqrt{3}$ je už přímo rovnice té žádané tečny.

Ad 4. To je zas stejná úvaha. Potřebujeme chování kolem bodu $x = \frac{1}{2}$, takže dosadíme $x = \frac{1}{2} + \delta$, kde δ bude velmi malé. Tím vznikne $\operatorname{arc\,tg}\left[(1 + 1 + 2\delta)^{-1/3} - (3 - 1 - 2\delta)^{-1/3}\right]$. Zase můžeme využít výsledek bodu číslo 2, jen když dosadíme $3\epsilon = 2\delta$. Proto vznikne

$$g(x) \approx -2^{-1/3} \cdot \tfrac{2}{3}\delta.$$

Stačí si uvědomit, že $\delta = x - \frac{1}{2}$, abychom dostali žádanou rovnici tečny

$$y = -\frac{2^{2/3}}{3}(x - \tfrac{1}{2}).$$

Třetí úloha

3 Při plavbě lodí jste zjistili, že každý den plavby rychlostí v stojí $a + bv^3$ zlaťáků (a a b jsou zde kladné konstanty). Chcete uplout nějakou předem danou vzdálenost L. Jakou konstantní rychlostí v musíte plout, aby byly celkové výdaje za celou plavbu co nejnižší? **[1 bod]**

Plujeme-li konstantní rychlostí v, pak vzdálenost L uplujeme za L/v dní. Za každý z těchto dní musíme platit $a + bv^3$ zlatek, takže celkem zaplatíme

$$\frac{L}{v}(a + bv^3) = L\left(bv^2 + \frac{a}{v}\right).$$

Derivujme a položme rovno nule. Obdržíme rovnici $2vb - a/v^2 = 0$, jejímž řešením je

$$v = \sqrt[3]{\frac{a}{2b}}.$$

Přitom jak při $v \to 0$, tak při $v \to \infty$ rostou naše výdaje do nekonečna (v tom prvním případě proto, že poplujeme nekonečně dlouho). Proto je nalezený extrém skutečně globálním minimem.

Čtvrtá úloha

4 Houpací křeslo má ližiny ve tvaru funkce $f(x) = \mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x} - 2 - x^2$ na intervalu $\langle -1; 1\rangle$. Řekněme, že v něm sedíte vzpřímeně a bez hnutí a houpete se bez tření a jiných odporových sil. Při houpání se postupně dostávají do kontaktu se zemí jednotlivé body ližiny. Řekněme, že se ližina v nějakém okamžiku dotýká země bodem $[x; f(x)]$.
1. Pod jakým úhlem od svislice jste v tom okamžiku nakloněni? **[1 bod]**
2. V jaké výšce bude v tomto okamžiku Vaše hlava, když bez houpání (tedy v okamžiku, kdy se ližina dotýkala země bodem $[0; 0]$) byla ve výšce h? **[1 bod]**

Ad 1. Pohledem na obrázek vidíme, že když se ližina odvalí do některého bodu, sklopí se kolmice přesně o ten úhel α, který je mezi zemí a tečnou k ližině právě v tom bodě, na kterém ližina stojí. Proto stačí zjistit směrnici tečny: derivujeme, dostaneme $f' = \mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x} - 2x$, a to je tangens úhlu α, takže musí být

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}(\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x} - 2x).$$

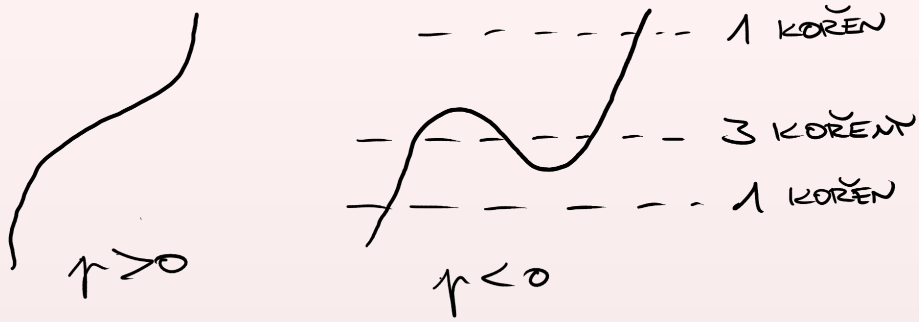
Ad 2. Výška naší hlavy nad zemí je — jak zas vidíme z obrázku — vzdálenost tečky (tedy vlastně bodu $[0; h]$) od té tečny v příslušném bodě. Víme, že vzdálenost bodu $[X; Y]$ od přímky $ax + by + c$ je $d = \frac{|aX+bY+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Stačí tedy napsat rovnici tečny: $Y - f(x) = f'(x)(X - x)$ a dosadit:

$$d = \frac{|h - f(x) + xf'(x)|}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}.$$

Pátá úloha

$\boxed{5}$ Uvažme kubický polynom $P(x) = x^3 + px + q$, kde p, q jsou nenulová reálná čísla.

1. Zjistěte, kde je rostoucí, kde klesající, kde má extrémy a jakých v nich nabývá hodnot. [**1 bod**]
2. Každý takový polynom má buď jeden, nebo tři reálné kořeny (včetně násobnosti). Najděte způsob, jak pro každou možnou hodnotu p a q určit, který z těchto dvou případů nastává. [**1 bod**]



Ad 1. Derivace je $P'(x) = 3x^2 + p$. Tady mohou nastat dva případy: buď je p kladné, pak je $3x^2+p$ také vždy kladné a $P(x)$ je všude rostoucí; extrém pak vůbec nemá. Nebo je naopak p záporné; pak má rovnice $3x^2+p = 0$ dva kořeny, a to $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$, přičemž se lehko přesvědčíme, že nalevo od obou těchto kořenů $P(x)$ roste, mezi nimi klesá a napravo od obou zase roste. Dosadíme-li $x = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$ do $P(x)$, zjistíme, že hodnoty v extrémech jsou

$$P\left(\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = \pm\left(-\frac{p}{3}\right)^{3/2} + p\left(-\frac{p}{3}\right)^{1/2} + q.$$

Zde ještě můžeme druhý člen vynásobit a vydělit ∓ 3. Tím nakonec dostaneme

$$P\left(\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = \pm\left(-\frac{p}{3}\right)^{3/2} \mp 3\frac{-p}{3}\left(-\frac{p}{3}\right)^{1/2} + q = q \mp 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{3/2}.$$

Ad 2. Už jsme zjistili, že pokud je $p > 0$, tak je $P(x)$ všude rostoucí. Přitom roste postupně z $-\infty$ až do $+\infty$, takže nulou musí projít právě jednou. Naopak při $p < 0$ vznikne „vlnka" mezi oběma extrémy: je-li hodnota $P(x)$ v jednom extrému kladná a v druhém záporná, protne $P(x)$ nulu celkem třikrát, naopak pokud mají obě hodnoty stejné znamení, je vlnka celá pod (nebo nad) nulou a zas bude jen jeden kořen.

Takže pokud dvě hodnoty v extrémech $q \mp 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{3/2}$ mají rozličná znamení, budou tři kořeny, jinak bude jeden. To můžeme zapsat i jinak: rozličná znamení budou mít právě tehdy, když součin obou těch hodnot bude záporný (kladné krát záporné číslo je vždy záporné). Naopak pokud součin bude kladný, ukazuje to na souhlasná znamení (kladné krát kladné i záporné krát záporné je pořád kladné). Proto se musíme kouknout na veličinu

$$\left[q - 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{3/2}\right]\left[q + 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{3/2}\right] = q^2 - 4\left(-\frac{p}{3}\right)^3 = q^2 + \frac{4}{27}p^3.$$

Navíc nás zajímá jen to, jestli je to kladné či záporné. Když tedy celou tuhle veličinu vydělíme čtyřmi, znamení se nezmění a přicházíme k tomu, že je pro nás důležitý tzv. *diskriminant* kubické rovnice

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Jestliže je $D > 0$ (do toho mimochodem spadají i všechny případy $p > 0$, které jsme vyřadili už předtím), znamená to, že $P(x)$ má jen jeden reálný kořen. Při $D < 0$ jsou naopak tři. Tato veličina tedy plní úplně stejnou úlohu jako diskriminant u kvadratické rovnice — i tam jsme podle něj poznali, jestli jsou dva kořeny, nebo žádný.

Šestá úloha

6 Máme rotačně symetrickou nádobu. To znamená, že každý vodorovný řez ve výšce h má tvar kruhu o jistém poloměru, který nazveme $r(h)$. Nádobu naplníme vodou o objemu V a necháme ji vytékat otvorem ve dně, který má plochu S.
1. Pomocí diferenciálu zapište vztah mezi změnou objemu vody $\mathrm{d}V$ a výškou hladiny $\mathrm{d}h$. **[½ bodu]**
2. Pak podobně zapište změnu objemu vody $\mathrm{d}V$ za čas $\mathrm{d}t$, víte-li, že je-li výška hladiny h, vytéká voda ze dna rychlostí $\sqrt{2gh}$. **[½ bodu]**
3. Jak má vypadat tvar nádoby $r(h)$, aby hladina vody klesala konstantní rychlostí $w = -\,\mathrm{d}h\big/\mathrm{d}t$? **[1 bod]**

Ad 1. Jestliže se hladina zvedne o $\mathrm{d}h$, znamená to, že jsme vlastně na vršek veškeré vody, která už v nádobě byla, přidali ještě další malinkou vrstvičku právě o výšce $\mathrm{d}h$. Díky rotační symetrii nádoby má tato vrstvička tvar hodně tenounkého válce s kruhovou podstavou a poloměr této podstavy je právě $r(h)$. Takže se tím objem zvýší právě o objem válce s těmito rozměry. Proto dostaneme

$$\mathrm{d}V = \pi r(h)^2\,\mathrm{d}h.$$

Ad 2. Je-li ve dně otvor o ploše S, vyteče za čas $\mathrm{d}t$ vlastně „váleček“ vody o podstavě S a délce $v\,\mathrm{d}t$. Jelikož je $v = \sqrt{2gh}$, dostaneme $\mathrm{d}V = -\sqrt{2gh}\,S\,\mathrm{d}t$.

Ad 3. Vydělíme obě předchozí rovnice mezi sebou. Tím se obdrží

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}V} = 1 = -\frac{\pi r(h)^2}{\sqrt{2gh}\,S}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}.$$

Je-li $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -w =$ const., můžeme to prostě do této rovnice dosadit a získat rovnost $\pi r^2 w/\sqrt{2gh}\,S = 1$. Z té už můžeme snadno vyjádřit r:

$$r = \sqrt{\frac{\sqrt{2g}\,S}{\pi w}}\,h^{1/4}.$$

Takže aby hladina klesala konstantní rychlostí, musí být poloměr úměrný čtvrté odmocnině výšky (což je sice prapodivný, ale správný výsledek!)