Řešení páté písemky

První úloha

1 Řešte rovnici $xy' + y - y^2 = 0$ s počáteční podmínkou $y(1) = 3$. [1 **bod**]

Zapíšeme $y' = \frac{dy}{dx}$ a provedeme separaci takto:

$$x\frac{dy}{dx} = y^2 - y \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{y^2 - y} = \frac{dx}{x}.$$

Teď už můžeme integrovat. Vlevo rozložíme v parciální zlomky: $\frac{1}{y(y-1)} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}$. Vše se tedy integruje na nějaký logaritmus a máme

$$\ln(y-1) - \ln y = \ln x + C.$$

Odlogaritmujeme a získáme řešení

$$\frac{y-1}{y} = 1 - \frac{1}{y} = Kx \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{1 - Kx}.$$

Nakonec vezmeme v úvahu počáteční podmínku $y(1) = 3$. Prostě dosadíme $x = 1, y = 3$ a obdržíme

$$3 = \frac{1}{1-K} \quad \Longrightarrow \quad K = \frac{2}{3}.$$

Proto tedy dostaneme řešení $y = \frac{1}{1-\frac{2}{3}x}$.

Druhá úloha

2 Řešte rovnici $(x+1)y' = -xy$ s počáteční podmínkou $y(0) = 1$. [1 **bod**]

Zde se zase hodí separace. Tentokrát ji provedeme takto:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x}{x+1}dx = \left(\frac{1}{x+1} - 1\right) dx.$$

Zase už můžeme integrovat. Získáme

$$\ln y = \ln(x+1) - x + C.$$

Při $x = 0$ má být $y = 1$. Dosadíme to tam a máme $\ln 1 = \ln 1 - 0 + C$. Proto $C = 0$ a po odlogaritmování už snadno dostáváme

$$y = (x+1)\mathbf{e}^{-x}.$$

Třetí úloha

3 Najděte obecné řešení rovnice $xy' = y - \frac{x}{\sin\frac{y}{x}}$. Může se Vám hodit substituce $y = ux$. [1 **bod**]

Nejdřív si připravíme substituci: pokud $y = ux$, bude i $y' = u'x + u$. Rovnici teď můžeme vydělit x:

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{\sin \frac{y}{x}}$$

a provést substituci Místo y/x budeme psát prostě u a derivaci nahradíme podle vztahu výše, čímž se obdrží

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x + u = u - \frac{1}{\sin u} \qquad \Longrightarrow \qquad \sin u \,\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Integrujme obě strany. Získáme $-\cos u = -\ln x + C$, tedy

$$u = \arccos(\ln x + C).$$

Nakonec musíme odstranit substituci: máme $u = y/x$, a tak dostaneme konečné řešení

$$y = x \arccos(\ln x + C).$$

Čtvrtá úloha

$\boxed{4}$ Řešte rovnici $y' + 4yx^3 = x^2\mathrm{e}^{-x^4}$. Asi nejlepší je něčím tu rovnici vynásobit, aby se vlevo objevila úplná derivace. [1 **bod**]

Násobme celou rovnici e^{x^4}. Tím získáme

$$\mathrm{e}^{x^4}y' + 4x^3\mathrm{e}^{x^4}y = x^2.$$

Vlevo si všimneme, že $4x^3\mathrm{e}^{x^4} = (\mathrm{e}^{x^4})'$. Proto je levá strana derivací součinu $\mathrm{e}^{x^4}y$. Obdobně můžeme x^2 vpravo zapsat jako derivaci $x^3/3$. Učiníme-li to, získáme rovnost

$$(\mathrm{e}^{x^4}y)' = (x^3/3)'.$$

Obsahy obou závorek se tedy liší jen o konstantu. Proto je

$$\mathrm{e}^{x^4}y = \frac{x^3}{3} + C \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{x^3}{3}\mathrm{e}^{-x^4} + C\mathrm{e}^{-x^4}.$$

Pátá úloha

$\boxed{5}$ Otestoval jsem se 100% spolehlivým testem na covid a byl jsem negativní. Řekněme, že po každém okamžiku $\mathrm{d}t$, mám pravděpodobnost $\lambda\,\mathrm{d}t$, že se nakazím (zde λ je kladná konstanta). Vypočtěte pravděpodobnost, že po čase t od testu budu nakažený. Dále určete čas τ, po kterém bych se měl jít nejpozději otestovat znova, nechci-li, aby pravděpodobnost, že jsem nakažený, byla větší než P. [2 **body**]

Řekněme, že v čase t je pravděpodobnost, že jsem nakažen, rovna $P(t)$, a čas $t = 0$ odpovídá okamžiku testu. Jaká bude pravděpodobnost, že budu nakažen v čase $t + \mathrm{d}t$? To je snadné: buď jsem byl nakažen už v čase t (pravděpodobnost $P(t)$) a pak se na tom už nic nezmění. Nebo jsem nakažen nebyl (pravděpodobnost $1-P(t)$) a nakazil jsem se zrovna během toho malého okamžiku $\mathrm{d}t$ (to se stane s pravděpodobností $\lambda\,\mathrm{d}t$. Celkem tedy dostáváme

$$P(t + \mathrm{d}t) = P(t) + [1 - P(t)]\lambda\,\mathrm{d}t => \underbrace{P(t + \mathrm{d}t) - P(t)}_{\mathrm{d}P} = (1 - P)\lambda\,\mathrm{d}t.$$

Protože vlevo stojí přímo dP, tj. změna pravděpodobnosti P za maličký čas dt, máme už diferenciální rovnici pro P. Snadno ji můžeme separovat na $\frac{\mathrm{d}P}{1-P} = \lambda\,\mathrm{d}t$ a integrovat:

$$\ln(1-P) = -\lambda t + C.$$

V okamžiku testu (což byl čas $t = 0$) jsem určitě nebyl nakažen ($P = 0$). Dosadíme to do rovnice a dostáváme $C = 0$. Zbytek odlogaritmujeme a dostaneme

$$1 - P = \mathrm{e}^{-\lambda t} \quad \Longrightarrow \quad P = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Pokud máme odpovědět na otázku, po jaké době bych se měl otestovat, pokud nechci, abych byl nakažen s pravděpodobností větší než P, bude dobře se vrátit k rovnosti $\ln(1-P) = -\lambda t$. Pokud do ní totiž dosadíme P, hned můžeme vypočíst hraniční čas t, kde pravděpodobnost nakažení této hodnoty dosáhne. Obdržíme tedy

$$\tau = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{1-P}.$$

Šestá úloha

6 Jednoho dne dopoledne začalo rovnoměrně a hustě sněžit. V poledne vyjel na silnici sněžný pluh. Ten za první hodinu ujel dva kilometry a za další hodinu už jen jeden. Kdy začalo sněžit? Předpokládejte, že rychlost sněžného pluhu je nepřímo úměrná výšce sněhu. [**2 body**]

Řekněme, že začalo sněžit v čase $t = 0$ a že čas budeme měřit v hodinách. Sněží rovnoměrně, tedy výška sněhu je úměrná času a bude platit $h = ct$, kde c je nějaká konstanta. Rychlost pluhu je zas nepřímo úměrná výšce sněhu, takže bude platit $v = d/h = \frac{d/c}{t}$. Obě konstanty c i d se tu vyskytují jen v podílu, tak můžeme ten podíl označit jako $d/c = \alpha$ a zůstala nám tu jediná neznámá konstanta.

Zároveň víme, že rychlost je změna dráhy za čas, tj. $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$. Proto máme rovnici $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha}{t}$, kterou hned můžeme separovat na $\mathrm{d}s = \alpha\frac{\mathrm{d}t}{t}$. Ihned lze integrovat:

$$s(t) = \alpha \ln t + K,$$

kde K je nějaká integrační konstanta, kterou neznáme.

Jelikož čas $t = 0$ označuje okamžik, kdy začalo sněžit (a ten okamžik neznáme), vlastně nevíme, kdy v tomto systému bylo to poledne. Zatím si to tedy označme nějakým písmenkem, např. τ. Pak ale budeme vědět, že v poledne (tj. v čase τ) pluh právě vyjel (tj. ujel dráhu 0), v jednu hodinu (tj. v čase $\tau + 1$) ujel dva kilometry a za další hodinu (tj. v čase $\tau + 2$) ujel už jen jeden, takže to celkem dělá tři. Proto máme tři rovnice:

$$\begin{aligned} s(\tau) &= \alpha\ln\tau + K = 0, \\ s(\tau+1) &= \alpha\ln(\tau+1) + K = 2, \\ s(\tau+2) &= \alpha\ln(\tau+2) + K = 3. \end{aligned}$$

To už jsou tři rovnice pro tři neznámé α, K, τ, z nichž ovšem první dvě nás vůbec nezajímají. Nejdřív se zbavíme konstanty K tím, že odečteme první rovnici postupně od druhých dvou. Tím získáme

$$\begin{aligned} \alpha[\ln(\tau+1) - \ln\tau] = \alpha\ln\left(1+\tau^{-1}\right) &= 2, \\ \alpha\ln\left(1+2\tau^{-1}\right) &= 3. \end{aligned}$$

Ještě musíme odstranit α. Vydělíme tedy rovnice mezi sebou a po menších úpravách dostáváme $2\ln(1+2\tau^{-1}) = 3\ln(1+\tau^{-1})$. Odlogaritmujeme; vyjde $(1+2\tau^{-1})^2 = (1+\tau^{-1})^3$, čili

$1 + 4\tau^{-1} + 4\tau^{-2} = 1 + 3\tau^{-1} + 3\tau^{-2} + \tau^{-3}$. Jedničky odstraníme a násobíme τ^3; dostaneme obyčejnou kvadratickou rovnici $\tau^2 + \tau - 1 = 0$, jejíž dvě řešení jsou $\frac{1}{2}(\pm\sqrt{5} - 1)$. Jelikož jde ovšem o údaj, o kolik hodin po začátku sněžení nastalo poledne (a to musí být kladné, protože sněžit začalo už před polednem), musíme kořen s mínusem zahodit. Začalo tedy sněžit $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ hodiny před polednem, což je asi 37 minut.