10. DETERMINANTY

Jan Paseka

Ústav matematiky a statistiky
Masarykova univerzita

27. listopadu 2024

Obsah

Abstrakt

V této kapitole zavedeme ***determinanty*** čtvercových matic libovolného rozměru $n \times n$ nad pevným tělesem K, řekneme si jejich základní vlastnosti a naučíme se je vypočítat včetně příkladů jejich aplikace.

Abstrakt

V této kapitole zavedeme ***determinanty*** čtvercových matic libovolného rozměru $n \times n$ nad pevným tělesem K, řekneme si jejich základní vlastnosti a naučíme se je vypočítat včetně příkladů jejich aplikace.

V celé kapitole K označuje pevné těleso, m, n jsou přirozená čísla.

Obsah

Motivace

Determinant je jedno z nejdůležitějších čísel, které můžeme přiřadit čtvercové matici. Lze na něj nahlížet z různých úhlů pohledu:

- geometricky jako na orientovaný objem rovnoběžnostěnu určeného vektory tvořícími řádky (nebo sloupce) matice,
- algebraicky jako na výraz sestavený z prvků matice, který se specificky chová při řádkových úpravách,
- jako na nástroj pro řešení soustav lineárních rovnic (Cramerovo pravidlo).

Historie

Pojem determinantu se vyvíjel postupně:

- 2. století př.n.l. - Číňané řešili soustavy lineárních rovnic metodami podobnými Cramerovu pravidlu,
- 1693 - Gottfried W. Leibniz je považován za objevitele determintů,
- 1750 - Gabriel Cramer publikoval své pravidlo pro řešení soustav rovnic (1748 - posmrtně C. Maclaurin),
- 1812 - Augustin-Louis Cauchy zavedl termín "determinant"a systematicky studoval jejich vlastnosti,
- 1864 - K.T. Weierstrass dal determinantům moderní axiomatickou definici.

Definice I

Definice 1

Determinant čtvercové matice **A** *řádu n je číslo* $\det(\mathbf{A})$, *které splňuje následující vlastnosti:*

(L) *Je lineární vzhledem ke každému řádku matice* **A**, *jsou-li zbývající řádky fixovány.*

(S) *Jsou-li dva řádky matice* **A** *stejné, je determinant nulový.*

(N) *Determinant jednotkové matice je roven* 1.

Nyní stojíme před třemi důležitými otázkami:

1. Existuje taková funkce $\det\colon Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$?
2. Je tato funkce jednoznačná?
3. Pokud taková funkce existuje, jak vypočítáme hodnotu $\det \mathbf{A}$?

Definice II

Z praktických důvodů se rozhodneme řešit tyto otázky v opačném pořadí. V této fázi tedy vlastně nevíme, zda taková funkce determinantu existuje. Je stále možné, že žádná funkce determinantu neexistuje, a všechny naše výsledky by měly obsahovat předpoklad:

"Pokud existuje funkce $\det$ splňující Definici 1, pak . . . ".

Existence a jednoznačnost funkce determinantu bude dokázána později.

Obsah

1. Motivace
2. Aplikace
   - Obsah a objem
   - Zjišťování viditelnosti
   - Detailní geometrická interpretace
3. Základní vlastnosti determinantu

Obsah a objem

Pro matici řádu 2 je determinant roven obsahu rovnoběžníku určeného řádkovými vektory matice, s orientací danou jejich uspořádáním.
Pro matici řádu 3 je determinant roven objemu rovnoběžnostěnu určeného řádkovými vektory, opět s příslušnou orientací.
Konkrétně pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ je

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

což je zároveň orientovaný obsah příslušného rovnoběžníku.

Obsah a objem

Pro matici třetího řádu lze použít Sarrusovo pravidlo nebo rozvoj podle řádku:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Zjišťování viditelnosti

V počítačové grafice lze determinant využít pro určení, zda je trojúhelník v rovině orientován po směru nebo proti směru hodinových ručiček, nebo zda je trojúhelník v prostoru viditelný z daného pohledu. Toto určení je založeno na znaménku determinantu matice sestavené z vrcholů trojúhelníku.

Příklad 2.1

Pro trojúhelník s vrcholy $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ je orientace dána znaménkem determinantu

$$\det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

Kladné znaménko odpovídá orientaci proti směru hodinových ručiček.

Geometrický význam determinantu lze chápat v několika úrovních:

Detailní geometrická interpretace

1. Pro matici 2×2:
   - Determinant představuje orientovanou plochu rovnoběžníku
   - Kladné znaménko znamená, že druhý vektor leží vlevo od prvního
   - Nulový determinant značí lineárně závislé vektory

Detailní geometrická interpretace

1. Pro matici 2×2:
   - Determinant představuje orientovanou plochu rovnoběžníku
   - Kladné znaménko znamená, že druhý vektor leží vlevo od prvního
   - Nulový determinant značí lineárně závislé vektory
2. Pro matici 3×3:
   - Determinant udává orientovaný objem rovnoběžnostěnu
   - Znaménko určuje orientaci pravotočivé/levotočivé báze
   - Geometrická interpretace řádkových úprav jako transformací prostoru

Obsah

Výměna řádků a řádkové elementární matice

Lemma 3.1

Při výměně dvou řádků v matici determinant změní znaménko.

Věta 3.2 (Determinanty řádkových elementárních matic)

1. *Elementární matice odpovídající prohození dvou řádků má determinant* -1.
2. *Elementární matice odpovídající vynásobení nějakého řádku prvkem* $c \in \mathbf{K}$ *má determinant* c.
3. *Elementární matice odpovídající přičtení* c*-násobku nějakého řádku k jinému má determinant* 1.
4. *Pro libovolnou elementární matici* E *a libovolnou čtvercovou matici* B *stejného řádu platí* $\det(\mathbf{EB}) = \det(\mathbf{E})\det(\mathbf{B})$.

Elementární matice pro řádkové operace

$$E_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_{3,c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{3,c,5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cauchyho věta o determinantu součinu matic

Věta 3.3

Jestliže $\mathbf{A}$ *je singulární matice, potom* $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Věta 3.4

*(**Cauchyho věta o determinantu součinu matic**)*
Pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ *platí*

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B};$$

Cauchyho věta o determinantu součinu matic

Věta 3.3

Jestliže $\mathbf{A}$ *je singulární matice, potom* $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Věta 3.4

*(**Cauchyho věta o determinantu součinu matic**)*
Pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ *platí*

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B};$$

tj. determinant součinu matic se rovná součinu jejich determinantů.

Pravidla pro výpočet determinantu I

Pravidla

(0) Determinant trojúhelníkové matice se rovná součinu jejích diagonálních prvků.

Pravidla pro výpočet determinantu I

Pravidla

(0) Determinant trojúhelníkové matice se rovná součinu jejích diagonálních prvků.

(1) Výměnou pořadí dvou řádků matice se hodnota jejího determinantu změní na opačnou.

Pravidla pro výpočet determinantu I

Pravidla

(0) Determinant trojúhelníkové matice se rovná součinu jejích diagonálních prvků.

(1) Výměnou pořadí dvou řádků matice se hodnota jejího determinantu změní na opačnou.

(2) Vynásobením nějakého řádku matice nenulovým skalárem $c \in K$ sa její determinant změní na c-násobek původní hodnoty.

(3) Připočtením skalárního násobku nějakého řádku matice k jejímu jinému řádku se hodnota jejího determinantu nezmění.

Pravidla pro výpočet determinantu I

Pravidla

(0) Determinant trojúhelníkové matice se rovná součinu jejích diagonálních prvků.

(1) Výměnou pořadí dvou řádků matice se hodnota jejího determinantu změní na opačnou.

(2) Vynásobením nějakého řádku matice nenulovým skalárem $c \in K$ sa její determinant změní na c-násobek původní hodnoty.

(3) Pripočtením skalárního násobku nějakého řádku matice k jejímu jinému řádku se hodnota jejího determinantu nezmění.

(4) Pokud matice obsahuje nulový řádek, případně dva stejné řádky, tak její determinant je 0.

Sloupcové elementární matice

Věta 3.5 (Determinanty sloupcových elementárních matic)

1. *Elementární matice odpovídající prohození dvou sloupců má determinant* -1.
2. *Elementární matice odpovídající vynásobení nějakého sloupce prvkem* $c \in \mathbf{K}$ *má determinant* c.
3. *Elementární matice odpovídající přičtení* c*-násobku nějakého sloupce k jinému má determinant* 1.

Elementární matice pro sloupcové operace

$$E_{2,4}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{3,c}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{3,c,5}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{5,c,3}$$

Základní vlastnosti determinantu I

Tvrzení 3.6

Determinant transponované matice sa rovná determinantu původní matice, t. j.

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$$

pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$.

Základní vlastnosti determinantu I

Tvrzení 3.6

Determinant transponované matice sa rovná determinantu původní matice, t. j.

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$$

pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$.

Všechny výsledky o determinantech matic si zachovají svou platnost, pokud v nich každý výskyt slova "sloupec" nahradíme slovem "řádek" a naopak.

Pravidla pro výpočet determinantu II

Pravidla

(1)^T Výměnou pořadí dvou sloupců matice se hodnota jejího determinantu změní na opačnou.

Pravidla pro výpočet determinantu II

Pravidla

$(1)^T$ Výměnou pořadí dvou sloupců matice se hodnota jejího determinantu změní na opačnou.

$(2)^T$ Vynásobením nějakého sloupce matice nenulovým skalárem $c \in K$ sa její determinant změní na c-násobek původní hodnoty.

$(3)^T$ Připočtením skalárního násobku nějakého sloupce matice k jejímu jinému sloupci se hodnota jejího determinantu nezmění.

Pravidla pro výpočet determinantu II

Pravidla

$(1)^T$ Výměnou pořadí dvou sloupců matice se hodnota jejího determinantu změní na opačnou.

$(2)^T$ Vynásobením nějakého sloupce matice nenulovým skalárem $c \in K$ sa její determinant změní na c-násobek původní hodnoty.

$(3)^T$ Připočtením skalárního násobku nějakého sloupce matice k jejímu jinému sloupci se hodnota jejího determinantu nezmění.

$(4)^T$ Pokud matice obsahuje nulový sloupec, případně dva stejné sloupce, tak její determinant je 0.

Základní vlastnosti determinantu II

Tvrzení 3.7

Nechť $1 \leq m < n$ *a* $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ *je bloková matice tvaru*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{B} \in K^{m \times m}$, $\mathbf{C} \in K^{m \times (n-m)}$ *a* $\mathbf{D} \in K^{(n-m) \times (n-m)}$. *Potom*

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} \cdot \det \mathbf{D}.$$

Pokud $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ jsou čtvercové matice, tak

$$\det \operatorname{diag}(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k) = \det \mathbf{A}_1 \cdot \ldots \cdot \det \mathbf{A}_k.$$

Cramerovo pravidlo

Věta 3.8

*(**Cramerovo pravidlo**)*
Nechť $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ *je regulární matice,* $\mathbf{b} \in K^n$ *a pro* $1 \leq j \leq n$ *nechť* $\mathbf{A}_j^{\mathbf{b}}$ *označuje matici, která vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *nahrazením jejího* j*-tého sloupce sloupcovým vektorem* $\mathbf{b}$*.*

Cramerovo pravidlo

Věta 3.8

*(**Cramerovo pravidlo**)*
Nechť $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ *je regulární matice,* $\mathbf{b} \in K^n$ *a pro* $1 \le j \le n$ *nechť* $\mathbf{A}_j^{\mathbf{b}}$ *označuje matici, která vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *nahrazením jejího* j*-tého sloupce sloupcovým vektorem* $\mathbf{b}$*.*

Potom soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \mathbf{b}$ *má jediné řešení*

$$\mathbf{x} = \left(\frac{|\mathbf{A}_1^{\mathbf{b}}|}{|\mathbf{A}|}, \frac{|\mathbf{A}_2^{\mathbf{b}}|}{|\mathbf{A}|}, \dots, \frac{|\mathbf{A}_n^{\mathbf{b}}|}{|\mathbf{A}|} \right)^T .$$

Aplikace Cramerova pravidla

Aplikace Cramerova pravidla

Příklad 3.9

Aplikace Cramerova pravidla

Příklad 3.9

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2\cdot x_1 & + & x_2 & + & 2\cdot x_3 & = & 6 \\ 2\cdot x_1 & + & 3\cdot x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

Aplikace Cramerova pravidla

Příklad 3.9

$$
\begin{array}{ccccccc}
2 \cdot x_1 & + & x_2 & + & 2 \cdot x_3 & = & 6 \\
2 \cdot x_1 & + & 3 \cdot x_2 & + & x_3 & = & 9 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3
\end{array}
$$

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

Aplikace Cramerova pravidla

Příklad 3.9

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2 \cdot x_1 & + & x_2 & + & 2 \cdot x_3 & = & 6 \\ 2 \cdot x_1 & + & 3 \cdot x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aplikace Cramerova pravidla

Příklad 3.9

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\cdot x_1 & + & x_2 & + & 2\cdot x_3 & = & 6 \\ 2\cdot x_1 & + & 3\cdot x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Aplikace Cramerova pravidla

Příklad 3.9

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\cdot x_1 & + & x_2 & + & 2\cdot x_3 & = & 6 \\ 2\cdot x_1 & + & 3\cdot x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 =$$

Aplikace Cramerova pravidla

Příklad 3.9

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2\cdot x_1 & + & x_2 & + & 2\cdot x_3 & = & 6 \\ 2\cdot x_1 & + & 3\cdot x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 6$$

Aplikace Cramerova pravidla

Příklad 3.9

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\cdot x_1 & + & x_2 & + & 2\cdot x_3 & = & 6 \\ 2\cdot x_1 & + & 3\cdot x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 6 \quad x_2 =$$

Aplikace Cramerova pravidla

Příklad 3.9

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
2 \cdot x_1 & + & x_2 & + & 2 \cdot x_3 & = & 6 \\
2 \cdot x_1 & + & 3 \cdot x_2 & + & x_3 & = & 9 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3
\end{array}
$$

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
$$

$$
x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 6 \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 2 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 0
$$

Aplikace Cramerova pravidla

Příklad 3.9

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\cdot x_1 & + & x_2 & + & 2\cdot x_3 & = & 6 \\ 2\cdot x_1 & + & 3\cdot x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 6 \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 2 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 0 \quad x_3 =$$

Aplikace Cramerova pravidla

Příklad 3.9

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\cdot x_1 & + & x_2 & + & 2\cdot x_3 & = & 6 \\ 2\cdot x_1 & + & 3\cdot x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 6 \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 2 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 0 \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = -3$$