

10. DETERMINANTY

Jan Paseka

Ústav matematiky a statistiky
Masarykova univerzita

27. listopadu 2024

Obsah

1 Motivace
● Historie

2 Aplikace

3 Základní vlastnosti
determinantu

Abstrakt

V této kapitole zavedeme **determinanty** čtvercových matic libovolného rozměru $n \times n$ nad pevným tělesem K , řekneme si jejich základní vlastnosti a naučíme se je vypočítat včetně příkladů jejich aplikace.

V celé kapitole K označuje pevné těleso, m, n jsou přirozená čísla.

Obsah

1 Motivace
● Historie

2 Aplikace

3 Základní vlastnosti
determinantu

Motivace

Determinant je jedno z nejdůležitějších čísel, které můžeme přiřadit čtvercové matici. Lze na něj nahlížet z různých úhlů pohledu:

- geometricky jako na orientovaný objem rovnoběžnostěnu určeného vektory tvořícími řádky (nebo sloupce) matice,
- algebraicky jako na výraz sestavený z prvků matice, který se specificky chová při řádkových úpravách,
- jako na nástroj pro řešení soustav lineárních rovnic (Cramerovo pravidlo).

Historie

Pojem determinantu se vyvíjel postupně:

- 2. století př.n.l. - Číňané řešili soustavy lineárních rovnic metodami podobnými Cramerovu pravidlu,
- 1693 - Gottfried W. Leibniz je považován za objevitele determinantů,
- 1750 - Gabriel Cramer publikoval své pravidlo pro řešení soustav rovnic (1748 - posmrtně C. Maclaurin),
- 1812 - Augustin-Louis Cauchy zavedl termín "determinant" a systematicky studoval jejich vlastnosti,
- 1864 - K.T. Weierstrass dal determinantům moderní axiomatickou definici.

Definice I

Definice 1

Determinant čtvercové matice \mathbf{A} řádu n je číslo $\det(\mathbf{A})$, které splňuje následující vlastnosti:

- (L) *Je lineární vzhledem ke každému řádku matice \mathbf{A} , jsou-li zbývající řádky fixovány.*
- (S) *Jsou-li dva řádky matice \mathbf{A} stejné, je determinant nulový.*
- (N) *Determinant jednotkové matice je roven 1.*

Nyní stojíme před třemi důležitými otázkami:

- 1 Existuje taková funkce $\det: \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$?
- 2 Je tato funkce jednoznačná?
- 3 Pokud taková funkce existuje, jak vypočítáme hodnotu $\det \mathbf{A}$?

Definice II

Z praktických důvodů se rozhodneme řešit tyto otázky v opačném pořadí. V této fázi tedy vlastně nevíme, zda taková funkce determinantu existuje. Je stále možné, že žádná funkce determinantu neexistuje, a všechny naše výsledky by měly obsahovat předpoklad:

"Pokud existuje funkce \det splňující Definici 1, pak ...".

Existence a jednoznačnost funkce determinantu bude dokázána později.

Obsah

1 Motivace

2 Aplikace

- Obsah a objem

- Zjišťování viditelnosti
- Detailní geometrická interpretace

3 Základní vlastnosti determinantu

Obsah a objem

Pro matici řádu 2 je determinant roven obsahu rovnoběžníku určeného řádkovými vektory matice, s orientací danou jejich uspořádáním.

Pro matici řádu 3 je determinant roven objemu rovnoběžnostěnu určeného řádkovými vektory, opět s příslušnou orientací.

Konkrétně pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ je

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

což je zároveň orientovaný obsah příslušného rovnoběžníku.

Obsah a objem

Pro matici třetího řádu lze použít Sarrusovo pravidlo nebo rozvoj podle řádku:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Zjišťování viditelnosti

V počítačové grafice lze determinant využít pro určení, zda je trojúhelník v rovině orientován po směru nebo proti směru hodinových ručiček, nebo zda je trojúhelník v prostoru viditelný z daného pohledu. Toto určení je založeno na znaménku determinantu matice sestavené z vrcholů trojúhelníku.

Příklad 2.1

Pro trojúhelník s vrcholy $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ je orientace dána znaménkem determinantu

$$\det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

Kladné znaménko odpovídá orientaci proti směru hodinových ručiček.

Geometrický význam determinantu lze chápat v několika úrovních:

Detailní geometrická interpretace

- 1 Pro matici 2×2 :
 - Determinant představuje orientovanou plochu rovnoběžníku
 - Kladné znaménko znamená, že druhý vektor leží vlevo od prvního
 - Nulový determinant značí lineárně závislé vektory
- 2 Pro matici 3×3 :
 - Determinant udává orientovaný objem rovnoběžnostěny
 - Znaménko určuje orientaci pravotočivé/levotočivé báze
 - Geometrická interpretace řádkových úprav jako transformací prostoru

Obsah

- 1 Motivace
- 2 Aplikace
- 3 Základní vlastnosti determinantu
 - Determinant součinu matic
 - Cramerovo pravidlo

Výměna řádků a řádkové elementární matice

Lemma 3.1

Při výměně dvou řádků v matici determinant změní znaménko.

Věta 3.2 (Determinanty řádkových elementárních matic)

- 1 *Elementární matice odpovídající prohození dvou řádků má determinant -1 .*
- 2 *Elementární matice odpovídající vynásobení nějakého řádku prvkem $c \in \mathbf{K}$ má determinant c .*
- 3 *Elementární matice odpovídající přičtení c -násobku nějakého řádku k jinému má determinant 1 .*
- 4 *Pro libovolnou elementární matici E a libovolnou čtvercovou matici B stejného řádu platí $\det(\mathbf{EB}) = \det(\mathbf{E}) \det(\mathbf{B})$.*

Elementární matice pro řádkové operace

$$E_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_{3,c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{3,c,5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cauchyho věta o determinantu součinu matic

Věta 3.3

Jestliže \mathbf{A} je singulární matice, potom $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Věta 3.4

(Cauchyho věta o determinantu součinu matic)

Pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ platí

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B};$$

tj. determinant součinu matic se rovná součinu jejich determinantů.

Pravidla pro výpočet determinantu I

Pravidla

- (0) Determinant trojúhelníkové matice se rovná součinu jejích diagonálních prvků.
- (1) Výměnou pořadí dvou řádků matice se hodnota jejího determinantu změní na opačnou.
- (2) Vynásobením nějakého řádku matice nenulovým skalárem $c \in K$ se její determinant změní na c -násobek původní hodnoty.
- (3) Pripočtením skalárního násobku nějakého řádku matice k jejímu jinému řádku se hodnota jejího determinantu nezmění.
- (4) Pokud matice obsahuje nulový řádek, případně dva stejné řádky, tak její determinant je 0.

Sloupcové elementární matice

Věta 3.5 (Determinanty sloupcových elementárních matic)

- ① *Elementární matice odpovídající prohození dvou sloupců má determinant -1 .*
- ② *Elementární matice odpovídající vynásobení nějakého sloupce prvkem $c \in \mathbf{K}$ má determinant c .*
- ③ *Elementární matice odpovídající přičtení c -násobku nějakého sloupce k jinému má determinant 1 .*

Elementární matice pro sloupcové operace

$$E_{2,4}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_{3,c}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{3,c,5}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{5,c,3}$$

Základní vlastnosti determinantu I

Tvrzení 3.6

Determinant transponované matice se rovná determinantu původní matice, t. j.

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$$

pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$.

Všechny výsledky o determinantech matic si zachovají svou platnost, pokud v nich každý výskyt slova "sloupec" nahradíme slovem "řádek" a naopak.

Pravidla pro výpočet determinantu II

Pravidla

- (1)^T Výměnou pořadí dvou sloupců matice se hodnota jejího determinantu změní na opačnou.
- (2)^T Vynásobením nějakého sloupce matice nenulovým skalárem $c \in K$ se její determinant změní na c -násobek původní hodnoty.
- (3)^T Pripočtením skalárního násobku nějakého sloupce matice k jejímu jinému sloupci se hodnota jejího determinantu nezmění.
- (4)^T Pokud matice obsahuje nulový sloupec, případně dva stejné sloupce, tak její determinant je 0.

Základní vlastnosti determinantu II

Tvrzení 3.7

Nechť $1 \leq m < n$ a $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je bloková matice tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{B} \in K^{m \times m}$, $\mathbf{C} \in K^{m \times (n-m)}$ a $\mathbf{D} \in K^{(n-m) \times (n-m)}$. Potom

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} \cdot \det \mathbf{D}.$$

Pokud $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$ jsou čtvercové matice, tak

$$\det \text{diag}(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k) = \det \mathbf{A}_1 \cdot \dots \cdot \det \mathbf{A}_k.$$

Cramerovo pravidlo

Věta 3.8

(Cramerovo pravidlo)

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je regulární matice, $\mathbf{b} \in K^n$ a pro $1 \leq j \leq n$ nechť $\mathbf{A}_j^{\mathbf{b}}$ označuje matici, která vznikne z matice \mathbf{A} nahrazením jejího j -tého sloupce sloupcovým vektorem \mathbf{b} .

Potom soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \mathbf{b}$ má jediné řešení

$$\mathbf{x} = \left(\frac{|\mathbf{A}_1^{\mathbf{b}}|}{|\mathbf{A}|}, \frac{|\mathbf{A}_2^{\mathbf{b}}|}{|\mathbf{A}|}, \dots, \frac{|\mathbf{A}_n^{\mathbf{b}}|}{|\mathbf{A}|} \right)^T.$$

Aplikace Cramerova pravidla

Příklad 3.9

$$2 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 = 6$$

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + x_3 = 9$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 6 \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 2 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 0 \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = -3$$