

7. BÁZE A DIMENZE

Jan Paseka

Ústav matematiky a statistiky
Masarykova univerzita

29. října 2024

Obsah

- 1 **Báze a dimenze**
 - Steinitzova věta
 - Báze a dimenze konečně rozměrného prostoru
 - Jednoznačnost vyjádření
 - Souřadnicové zobrazení
 - Kanonická báze
 - Dimenze součtu
- 2 **Hodnost matice**

Abstrakt

V této kapitole se seznámíme s pojmem **báze** vektorového prostoru.

To nám umožní ve vektorových prostorech zavést **souřadnice**.

Dále budeme definovat **dimenzi** vektorového prostoru a odvodíme si některé její základní vlastnosti.

V následující kapitole si potom mimo jiné dokážeme, že dimenze je základní strukturní invariant tzv. **konečně rozměrných** vektorových prostorů.

Obsah

- 1 **Báze a dimenze**
 - Steinitzova věta
 - Báze a dimenze konečně rozměrného prostoru
 - Jednoznačnost vyjádření
 - Souřadnicové zobrazení
 - Kanonická báze
 - Dimenze součtu
- 2 **Hodnost matice**

Steinitzova věta I

Věta 1.1 (Steinitzova věta)

Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in V$. Jsou-li vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ lineárně nezávislé a všechny patří do lineárního obalu $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m]$, pak $n \leq m$. Zároveň při vhodném uspořádání $\alpha' = (\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_m)$ posloupnosti $\alpha = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ platí, že posloupnost $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}'_{k+1}, \dots, \mathbf{v}'_m)$ generuje $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m]$.

Tvrzení 1.2

Pro libovolný vektorový prostor V jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (i) existuje konečná množina $X \subseteq V$ tak, že $[X] = V$;
- (ii) každá lineárně nezávislá množina $Y \subseteq V$ je konečná.

Steinitzova věta II

Říkáme, že vektorový prostor V je **konečně rozměrný** (**konečně dimenzionální**), pokud splňuje některou (tedy nutně obě) z ekvivalentních podmínek (i), (ii) právě dokázaného tvrzení.

V opačném případě říkáme, že V je **nekonečně rozměrný** (**nekonečně dimenzionální**) vektorový prostor.

Báze a dimenze I

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor.

Bází prostoru V nazýváme každou lineárně nezávislou uspořádanou n -tici $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ vektorů z V , která generuje celý prostor V .

Říkáme pak, že vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ **tvorí bázi** prostoru V .

Tvrzení 1.3

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

- (a) *libovolnou lineárně nezávislou uspořádanou k -tici $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ vektorů z V můžeme doplnit do nějaké báze $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_n)$ prostoru V ;*
- (b) *z libovolné generující uspořádané m -tice $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ vektorů z V můžeme vybrat nějakou bázi $(\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_n})$ prostoru V .*

Báze a dimenze II

Věta 1.4

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

- (a) *V má alespoň jednu bázi;*
- (b) *libovolné dvě báze prostoru V mají stejný počet prvků.*

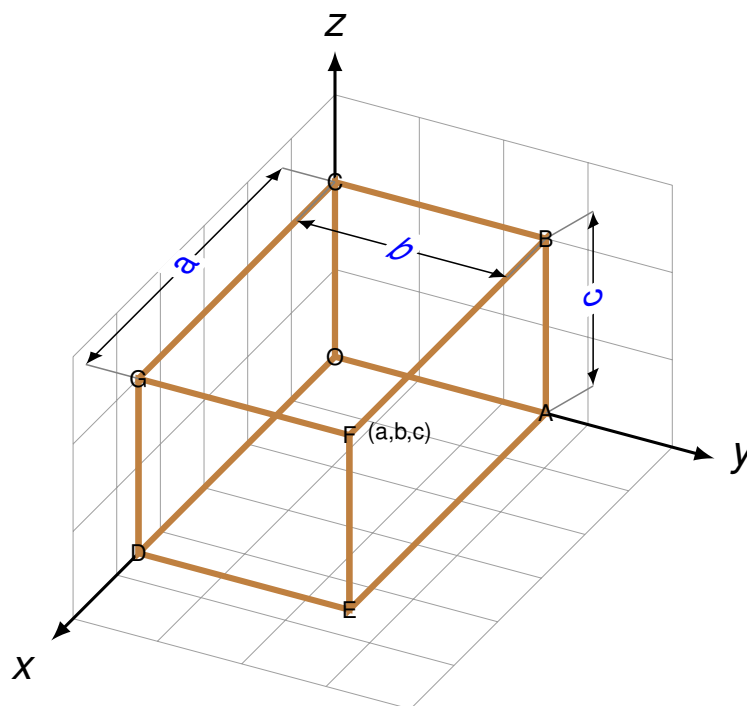
Právě dokázaná věta nám umožňuje korektně definovat **dimenzi** nebo též **rozměr** konečně rozměrného vektorového prostoru V jako počet prvků jeho libovolné báze.

Dimenzi vektorového prostoru V značíme $\dim V$.

Pokud $\dim V = n$, říkáme, že V je **n -rozměrný** vektorový prostor.

Pokud V je nekonečně rozměrný prostor, klademe $\dim V = \infty$.

Báze a dimenze III



Báze a dimenze IV

V případě, že bude potřebné zdůraznit úlohu (číselného) tělesa K , budeme používat podrobnější označení $\dim_K V$.

Tedy V je konečně rozměrný právě tehdy, když $\dim V < \infty$.

Tvrzení 1.5

Nechť $\dim V = n$, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in V$. Potom libovolné dvě z následujících podmínek implikují třetí:

- (i) vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ jsou lineárně nezávislé;
- (ii) $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m] = V$;
- (iii) $m = n$.

To kromě jiného znamená, že na ověření, zda n vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ tvoří bázi n -rozměrného vektorového prostoru V , stačí ověřit jen jednu (a to libovolnou) z podmínek (i), (ii).

Jednoznačnost vyjádření vzhledem na danou bázi I

Následující věta je speciálním případem věty z předchozí kapitoly o lineární nezávislosti.

Věta 1.6

Vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ tvoří bázi vektorového prostoru V právě tehdy, když každý vektor $\mathbf{x} \in V$ můžeme jednoznačně vyjádřit ve tvaru lineární kombinace $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n$.

Existence aspoň jednoho vyjádření $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n$ je ekvivalentní s podmínkou, že vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ generují V .

Jednoznačnost tohoto vyjádření je zase ekvivalentní s lineární nezávislostí vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$.

Jednoznačnost vyjádření vzhledem na danou bázi II

Tedy $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je bází V tehdy a jen tehdy, když pro každé $\mathbf{x} \in V$ existuje právě jedno $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \in K^n$ tak, že

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n = \alpha \cdot \mathbf{c}.$$

Uvědomme si, že

$$\mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Tento jednoznačně určený sloupcový vektor $\mathbf{c} \in K^n$ budeme nazývat **souřadnice vektoru \mathbf{x} vzhledem na bázi α** a označovat

$$\mathbf{c} = (\mathbf{x})_\alpha.$$

Souřadnicové zobrazení I

Tedy každá báze α v n -rozměrném vektorovém prostoru V definuje **souřadnicové zobrazení** $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\alpha$ z V do sloupcového vektorového prostoru K^n .

Tvrzení 1.7

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je báze konečně rozměrného vektorového prostoru V .

Potom příslušné souřadnicové zobrazení $(-)_\alpha : V \rightarrow K^n$ je bijektivní a zachovává lineární kombinace, tj. pro libovolná $a, b \in K, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí

$$(a\mathbf{x} + b\mathbf{y})_\alpha = a(\mathbf{x})_\alpha + b(\mathbf{y})_\alpha.$$

K němu inverzní zobrazení $(-)_\alpha^{-1} : K^n \rightarrow V$ je dané předpisem $\mathbf{c} \mapsto \alpha \cdot \mathbf{c}$.

Souřadnicové zobrazení II

Zejména tedy pro libovolné $\mathbf{x} \in V, \mathbf{c} \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = \alpha \cdot (\mathbf{x})_\alpha, \quad (\alpha \cdot \mathbf{c})_\alpha = \mathbf{c}.$$

První rovnost ukazuje, jak je možno vektor \mathbf{x} zrekonstruovat z dané báze α a jeho souřadnic $(\mathbf{x})_\alpha$ v této bázi;

druhá, že souřadnice lineární kombinace $\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i = \alpha \cdot \mathbf{c}$ v bázi $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ tvoří právě vektor $(c_1, \dots, c_n)^T$.

Takto zavedené souřadnice můžeme nazvat **sloupcovými souřadnicemi** vzhledem k dané bázi.

Podobným způsobem můžeme zavést i **řádkové souřadnice** a dokázat pro ně analogická tvrzení jako pro sloupcové.

Kanonická báze I

Příklad 1.8

Označme $\mathbf{e}_i^{(n)} = \mathbf{s}_i(\mathbf{I}_n) \in K^n$ sloupcový vektor skládající se samých nul, mimo i -té složky, která je 1.

Potom $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{e}_n^{(n)})$ je báze sloupcového vektorového prostoru K^n .

Nazýváme ji **kanonickou bází** tohoto prostoru. Můžeme ji ztotožnit s jednotkovou maticí \mathbf{I}_n .

Občas budeme horní index (n) vynechávat a příslušnou bázi označovat stručně $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

Kanonická báze II

Pro libovolný vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n,$$

proto $(\mathbf{x})_\varepsilon = \mathbf{x}$,

tj. každý vektor $\mathbf{x} \in K^n$ splývá se svými vlastními souřadnicemi v kanonické bázi.

Kanonická báze řádkového vektorového prostoru K^n je tvořena řádky jednotkové matice \mathbf{I}_n a značíme ji stejně jako v předcházejícím případě $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{e}_n^{(n)})^T$ nebo stručně $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)^T$, s tím rozdílem, že $\varepsilon^{(n)} = \varepsilon$ je sloupec vektorů a každé \mathbf{e}_i je řádek skládající se ze samých nul, mimo i -té pozice, na které je 1.

Kanonická báze III

Věta 1.9

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $\dim K^n = n$.

Příklad 1.10

Sloupce matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tvoří bázi α sloupcového vektorového prostoru K^4 .

Kanonická báze IV

Souřadnice vektoru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in K^n$ v bázi α jsou dané vztahem

$$(\mathbf{x})_\alpha = (x_4, x_3 - x_4, x_2 - x_3, x_1 - x_2)^T.$$

Platí totiž

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x_3 - x_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_2 - x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kanonická báze V

Příklad 1.11

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Pro libovolné $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$ označme $\mathbf{E}_{kl}^{(m,n)} = \mathbf{E}_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{m \times n}$ matici typu $m \times n$ nad tělesem K , která sestává ze samých nul, kromě pozice (k, l) , na které je 1.

Zřejmě každou matici $\mathbf{A} = (a_{kl}) \in K^{m \times n}$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \mathbf{E}_{kl}.$$

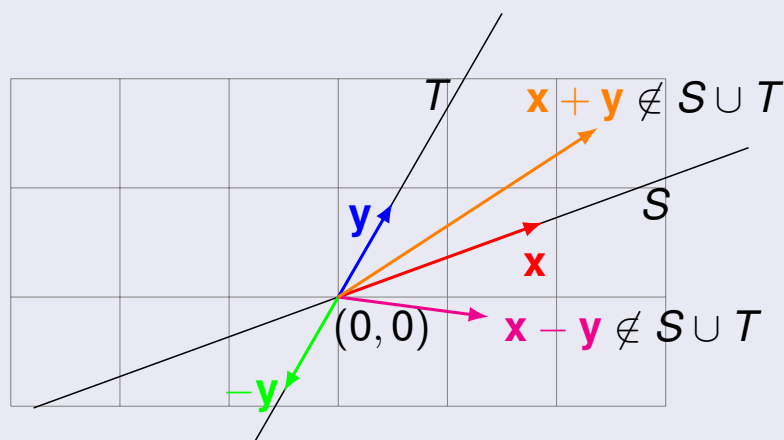
Z toho vyplývá, že matice $\mathbf{E}_{kl}^{(m,n)}$, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$, tvoří bázi vektorového prostoru $K^{m \times n}$ všech matic typu $m \times n$ nad tělesem K .

Speciálním případem je kanonická báze $\varepsilon^{(n)}$ v prostoru K^n .

Dostáváme tak vztah: $\dim K^{m \times n} = mn$.

Souřadnice vektoru XV

Příklad 1.12



Souřadnice vektoru $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ v bázi (\mathbf{x}, \mathbf{y}) je vektor $(1, 1)$.

Souřadnice vektoru $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ v bázi (\mathbf{x}, \mathbf{y}) je vektor $(1, -1)$.

Dimenze součtu a součinu I

Věta 1.13

Nechť $S, T \subseteq V$ jsou konečně rozměrné lineární podprostory vektorového prostoru V .

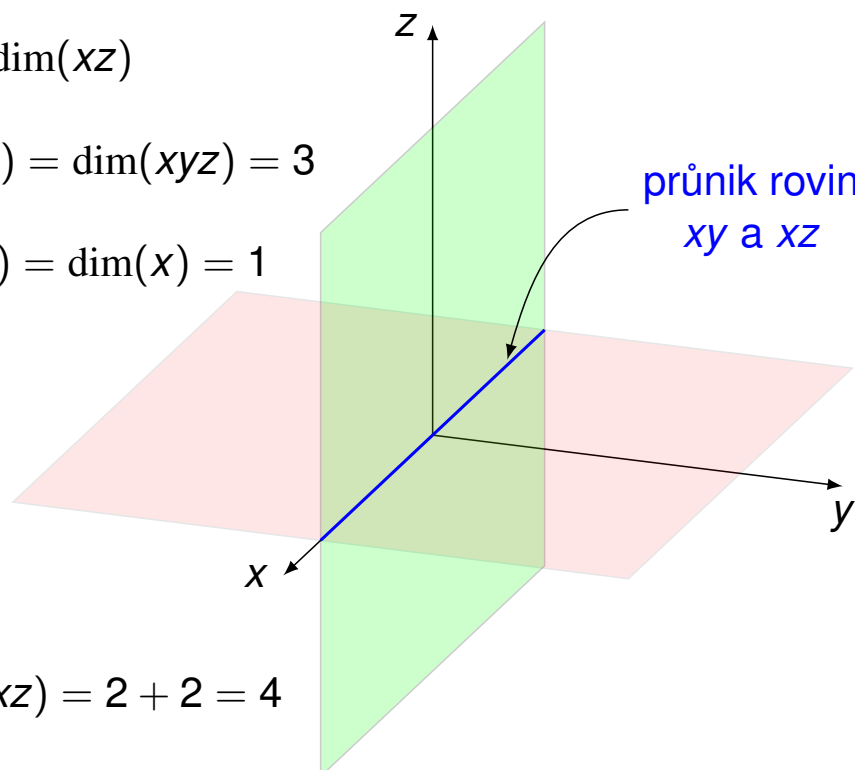
Potom

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T).$$

$$\dim(xy) = 2 = \dim(xz)$$

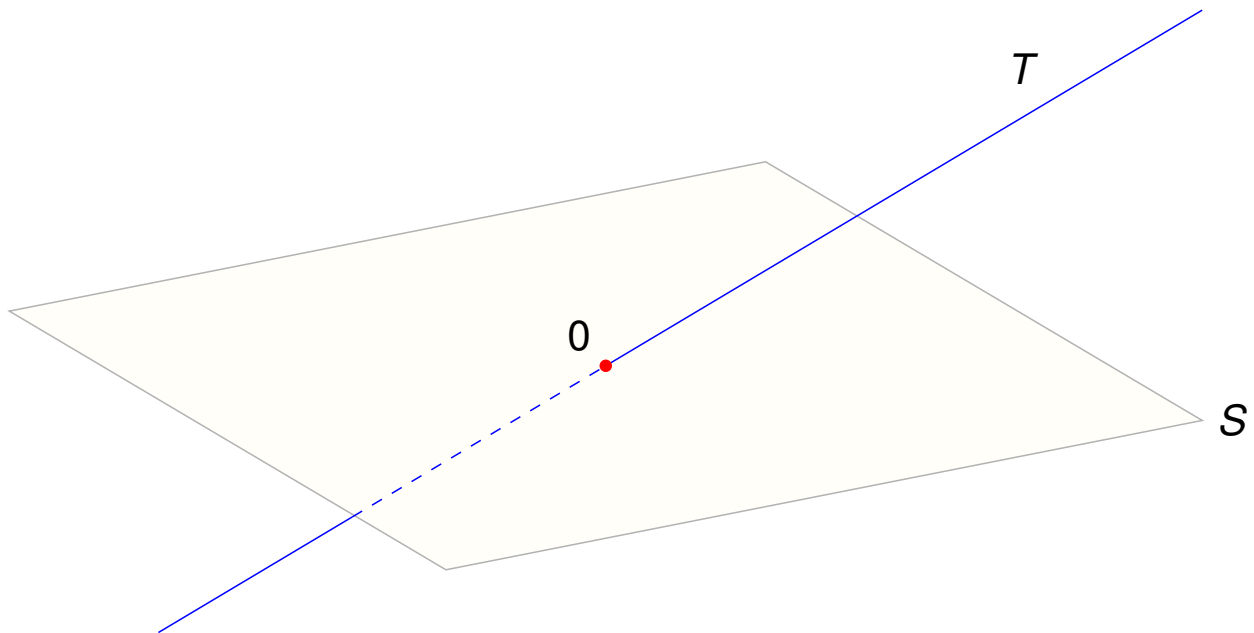
$$\dim((xy) + (xz)) = \dim(xyz) = 3$$

$$\dim((xy) \cap (xz)) = \dim(x) = 1$$



$$\dim(xy) + \dim(xz) = 2 + 2 = 4$$

$$\dim((xy) + (xz)) + \dim((xy) \cap (xz)) = 3 + 1 = 4$$



Dimenze součtu a součinu II

Důsledek 1.14

Nechť S, T jsou konečně rozměrné lineární podprostory vektorového prostoru V .

Potom $S \cap T = \{0\}$, tj. součet $S + T$ je direktní právě tehdy, když

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T.$$

Tvrzení 1.15

Nechť V, W jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad K .

Potom pro dimenzi jejich kartézského součinu platí

$$\dim(V \times W) = \dim V + \dim W.$$

Obsah

1 Báze a dimenze

2 Hodnost matice

- Definice hodnosti
- Vlastnosti hodnosti

Hodnost matice I

V této části je potřebné rozlišovat mezi vektorovými prostory řádkových resp. sloupcových vektorů. Prostor řádkových vektorů budeme značit $K^{1 \times n}$ a prostor sloupcových vektorů $K^{n \times 1}$.

Hodnost matice II

$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \in K^{1 \times n}$ označuje i -tý řádek a $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) \in K^{m \times 1}$ j -tý sloupec matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$.

Tuto matici můžeme zapsat blokově jako

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \mathbf{r}_2(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = (\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})).$$

Hodnost matice III

Řádkovou hodností $h_r(\mathbf{A})$ matice \mathbf{A} nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{1 \times n}$ generovaného řádky matice \mathbf{A} .

Podobně, **sloupcovou hodností** $h_s(\mathbf{A})$ matice \mathbf{A} nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{m \times 1}$ generovaného sloupci matice \mathbf{A} .

Tedy

$$\begin{aligned} h_r(\mathbf{A}) &= \dim[\mathbf{r}_1(\mathbf{A}), \mathbf{r}_2(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{r}_m(\mathbf{A})], \\ h_s(\mathbf{A}) &= \dim[\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})]. \end{aligned}$$

Hodnost matice IV

Označme $\varphi : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}$ lineární zobrazení dané předpisem $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in K^{n \times 1}$.

Hodností lineárního zobrazení φ nazýváme dimenzi jeho obrazu, t. j. $h(\varphi) = \dim \text{Im}\varphi$.

Zřejmě platí $h(\varphi) = h_s(\mathbf{A})$, protože lineární podprostor $\text{Im}\varphi \subseteq K^{m \times 1}$ je generovaný sloupci matice \mathbf{A} .

Hodnost matice V

Lemma 2.1

Necht' $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

(a) Necht' matice \mathbf{B} vznikne z matice \mathbf{A} provedením jedné elementární řádkové operace (ERO). Pak

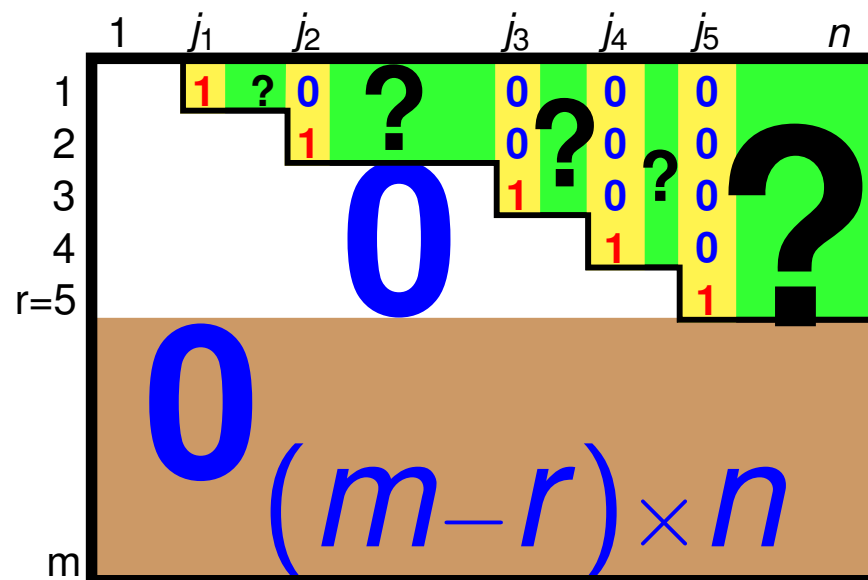
$$[\mathbf{r}_1(\mathbf{A}), \mathbf{r}_2(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{r}_m(\mathbf{A})] = [\mathbf{r}_1(\mathbf{B}), \mathbf{r}_2(\mathbf{B}), \dots, \mathbf{r}_m(\mathbf{B})].$$

(b) Necht' matice \mathbf{C} vznikne z matice \mathbf{A} vykonáním jedné elementární sloupcové operace (ESO). Pak

$$[\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})] = [\mathbf{s}_1(\mathbf{C}), \mathbf{s}_2(\mathbf{C}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{C})].$$

Hodnost matice VI

$$h_s(\mathbf{A}) = 5 = h_r(\mathbf{A})$$



Redukovaný stupňovitý tvar

Hodnost matice VII

Tvzení 2.2

Pro každou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ platí $h_r(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A})$.

Společnou hodnotu řádkové a sloupcové hodnoty budeme nyní značit $h(\mathbf{A})$ a nazývat **hodností matice \mathbf{A}** .

Zřejmě pro $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je $h(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$.

Tvzení 2.3

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$. Potom $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T)$.

Hodnost matice VIII

Tvrzení 2.4

Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in K^{m \times 1}$ jsou libovolné vektory a $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je matice taková, že $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_j$ pro $1 \leq j \leq n$.

Potom

- (a) $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $h(\mathbf{A}) = n$;
- (b) $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n] = K^{m \times 1}$ právě tehdy, když $h(\mathbf{A}) = m$.

Případ (a) může nastat tehdy, když $n \leq m$; naopak, (b) může nastat jedině za předpokladu $m \leq n$.

Hodnost matice IX

Tvrzení 2.5

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$. Potom

$$h(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \leq \min(h(\mathbf{A}), h(\mathbf{B})).$$

Shrnutí 2.6

Pro libovolnou matici \mathbf{A} typu $m \times n$ platí $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T) \leq m, n$. Hodnost se nemění elementárními řádkovými ani sloupcovými úpravami. Hodnost matice v redukovaném stupňovitém tvaru je rovna počtu nenulových řádků.

Hodnost matice X - Aplikace

Kluby města Lišákova – sbírka Šestnáct miniatur Jiřího Matouška

Ve městě žije n občanů, kteří jsou sdruženi v m klubech. Podle vyhlášky městské rady má každý klub lichý počet členů, zatímco pro každé dva kluby musí být počet společných členů sudý.

Věta 2.7

V této situaci je nutně $m \leq n$, tj. klubů není víc než občanů.

Občany označme $1, 2, \dots, n$ a kluby K_1, K_2, \dots, K_m . Definujeme matici \mathbf{A} typu $m \times n$, kde $a_{ij} = 1$ pokud $j \in K_i$ a $a_{ij} = 0$ jinak (kluby = řádky). Uvažujeme \mathbf{A} nad dvouprvkovým tělesem \mathbb{Z}_2 . Hodnost \mathbf{A} je nejvýše n . Podle vyhlášky městské rady platí $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_m$, a protože hodnost součinu matic je nejvýše rovna minimu z hodností činitelů, je $m = h(\mathbf{I}_m) \leq h(\mathbf{A}) \leq n$.