4. Inverzní matice

Jan Paseka

Ústav matematiky a statistiky
Masarykova univerzita

4. října 2024

Obsah

Abstrakt

V této kapitole zavedeme pojem ***inverzní matice*** k dané čtvercové matici.

Dále se naučíme počítat inverzní matice a LU-rozklad matice. Budeme aplikovat LU-rozklad matice na řešení soustav rovnic a výpočet inverze.

Abstrakt Zleva elementární matice LU-rozklad matice Definice Regulární matice
Inverzní matice Vlastnosti

Obsah

Inverzní matice I

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, t. j. $\mathbf{A}$ je ***čtvercová*** matice typu $n \times n$. ***Inverzní maticí*** k matici $\mathbf{A}$ rozumíme matici $\mathbf{B} \in K^{n \times n}$ tak, že

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

Zřejmě k dané čtvercové matici $\mathbf{A}$ existuje nanejvýš jedna inverzní matice.

Tuto jednoznačně určenou matici (pokud existuje) budeme značit $\mathbf{A}^{-1}$.

Vlastnosti inverzní matice I

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "\mathbf{A} \cdot (-)"'] \arrow[rr, bend right, "\boxed{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot (-) = \mathrm{id}_{K^n} = \mathbf{I}_n \cdot (-)}"'] & K^n \arrow[r, "\mathbf{B} \cdot (-)"'] & K^n
\end{tikzcd}$$

Regulární matice I

Říkáme, že čtvercová matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je ***regulární***, pokud k ní existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$; v opačném případě $\mathbf{A}$ je ***singulární***.

Tvrzení 1.1

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ *jsou regulární matice.*
Potom i matice $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ *a* $\mathbf{A}^T$ *jsou regulární a platí:*

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A},$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1},$$

$$\left(\mathbf{A}^{T}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{T}.$$

Obsah

Realizace ERO a ESO I

Tvrzení 2.1

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

(a) *Nechť matice* $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$ *vznikne z* $\mathbf{A}$ *provedením jedné ERO. Označme* $\mathbf{E}$ *matici, která vznikne z matice* $\mathbf{I}_m$ *provedením stejné ERO. Potom* $\mathbf{B} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$.

(b) *Nechť matice* $\mathbf{C} \in K^{m \times n}$ *vznikne z* $\mathbf{A}$ *provedením jedné ESO. Označme* $\mathbf{F}$ *matici, která vznikne z matice* $\mathbf{I}_n$ *provedením stejné ESO. Potom* $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}$.

Realizace ERO a ESO II

Čtvercové matice $\mathbf{E} \in K^{n \times n}$, které vzniknou z jednotkové matice $\mathbf{I}_n$ provedením jediné ERO nebo ESO, nazýváme ***elementární matice***.

Čtvercové matice $\mathbf{E} \in K^{n \times n}$, které vzniknou z jednotkové

1. matice $\mathbf{I}_n$ provedením jediné ERO, nazýváme ***zleva elementární matice***,
2. matice $\mathbf{I}_n$ provedením jediné ESO, nazýváme ***zprava elementární matice***.

Libovolnou ERO (ESO) na matici $\mathbf{A}$ můžeme realizovat vynásobením matice $\mathbf{A}$ vhodnou elementární maticí $\mathbf{E}$ ($\mathbf{F}$) zleva (zprava).

Výpočet inverzní matice I

Návod na výpočet inverzní matice k dané čtvercové matici $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$:

$$(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{I}_n) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \,|\, \mathbf{A}^{-1}).$$

Tvrzení 2.2

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ *a* $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_k \in K^{n\times n}$ *jsou elementární matice tak, že* $\mathbf{E}_k \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. *Potom* $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_k \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1$.

Věta 2.3

Pro libovolné $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n\times n}$ *platí* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n$ *právě tehdy, když* $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Výpočet inverzní matice II

K stejnému cíli vede též postup reprezentovaný schématem:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ESO}} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \\ \hline \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Tvrzení 2.4

Matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ *je regulární právě tehdy, když ji můžeme rozložit na součin* $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_k$ *konečného počtu elementárních matic* $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_k \in K^{n\times n}$.

Výpočet inverzní matice III

Tvrzení 2.5

Pro libovolné $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m\times n}$ *platí:*

(a) $\mathbf{A}$ *je řádkově ekvivalentní s* $\mathbf{B}$ ($\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$) *právě tehdy, když existuje regulární matice* $\mathbf{P} \in K^{m\times m}$ *tak, že* $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}$;

(b) $\mathbf{A}$ *je sloupcově ekvivalentní s* $\mathbf{B}$ ($\mathbf{A} \wr \mathbf{B}$) *právě tehdy, když existuje regulární matice* $\mathbf{Q} \in K^{n\times n}$ *tak, že* $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}$.

Obsah

Definice

LU-rozklad matice **A** je faktorizace matice na součin dolní trojúhelníkové matice **L** (Lower) a horní trojúhelníkové matice **U** (Upper).
Píšeme:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

kde:

- **A** je čtvercová matice řádu *n*,
- **L** je dolní trojúhelníková matice s jednotkami na diagonále, a
- **U** je horní trojúhelníková matice.

Abstrakt Zleva elementární matice LU-rozklad matice Definice Obecný postup
Inverzní matice Příklad Aplikace

Využití I

LU-rozklad je základním nástrojem numerické lineární algebry, který nachází široké uplatnění v mnoha oblastech vědy a techniky. Jeho schopnost efektivně řešit soustavy lineárních rovnic a provádět další numerické operace z něj činí nepostradatelný nástroj pro vědce, inženýry a programátory.

Kde se LU rozklad využívá v praxi?

- **Numerické metody:**
  - Řešení parciálních diferenciálních rovnic
  - Aproximace funkcí
  - Numerická integrace
- **Simulace:**
  - Simulace fyzikálních systémů
  - Simulace ekonomických modelů

Využití II

Kde se LU rozklad využívá v praxi?

- **Strojové učení:**
  - Řešení soustav normálních rovnic v metodě nejmenších čtverců
  - Výpočet inverzních matic v různých algoritmech
- **Grafické aplikace:**
  - Transformace souřadnic
  - Řešení problémů souvisejících s geometrií
- **Inženýrství:**
  - Analýza konstrukcí
  - Simulace proudění tekutin
- **Ekonomie:**
  - Ekonomické modelování
  - Optimalizace portfolia

Příklad I

Obecný tvar matic **L** a **U** pro matici 3x3:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Nalezení LU-rozkladu můžeme zapsat jako soustavu rovnic:

$$\begin{array}{lll} a_{11} = u_{11} & a_{21} = l_{21}u_{11} & a_{31} = l_{31}u_{11} \\ a_{12} = u_{12} & a_{22} = l_{21}u_{12} + u_{22} & a_{32} = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} \\ a_{13} = u_{13} & a_{23} = l_{21}u_{13} + u_{23} & a_{33} = l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{array}$$

LU rozklad se často používá pro řešení soustavy lineárních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kterou můžeme přepsat jako $\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$.
Toto lze řešit ve dvou krocích:
1. Řešíme $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ pro y. 2. Řešíme $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ pro x.

Příklad II

Uvažujme následující matici **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Našim cílem je najít matice **L** a **U** takové, že **A** = **LU**.

Postup výpočtu:

1. Nejprve určíme první sloupec matice L a první řádek matice U:

$$l_{11} = 1 \quad (\text{vždy}), \quad u_{11} = a_{11} = 2, \qquad l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{4}{2} = 2,$$
$$l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{-2}{2} = -1, \; u_{12} = a_{12} = -1, \qquad u_{13} = a_{13} = 1.$$

Abstrakt Zleva elementární matice LU-rozklad matice
Inverzní matice
Definice Obecný postup
Příklad Aplikace

Příklad III

2. Nyní vypočítáme zbývající prvky druhého sloupce matice **L** a druhého řádku matice **U**:

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 1 - 2(-1) = 3,$$
$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = \frac{2 - (-1)(-1)}{3} = \frac{1}{3},$$
$$u_{23} = a_{23} - l_{21},$$
$$u_{13} = -1 - 2(1) = -3.$$

3. Nakonec vypočítáme poslední prvek matice **U**:

$$u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 1 - (-1)(1) - \frac{1}{3}(-3) = 3.$$

Příklad IV

Pak

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{LU} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}.$$

Obecný postup

Tvrzení 3.1

Nechť $\mathbf{R}$ *je dolní (horní) trojúhelníková matice řádu n s nenulovými všemi prvky na hlavní diagonále. Pak* $\mathbf{R}$ *je regulární a inverzní matice* $\mathbf{R}^{-1}$ *je také dolní (horní) trojúhelníková. Má-li navíc matice* $\mathbf{R}$ *na hlavní diagonále všechny prvky rovné 1, pak i matice* $\mathbf{R}^{-1}$ *má samé jednotky na hlavní diagonále.*

Věta 3.2 (O LU-rozkladu)

Nechť $\mathbf{A}$ *je regulární matice řádu n, u které při Gaussově eliminaci nemusíme prohazovat řádky. Pak existují regulární matice* $\mathbf{L}$ *a* $\mathbf{U}$ *řádu n, pro které platí* $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, $\mathbf{L}$ *je dolní trojúhelníková matice s jednotkami na hlavní diagonále,* $\mathbf{U}$ *je horní trojúhelníková matice s nenulovými prvky na hlavní diagonále.*
Matice $\mathbf{L}$ *a* $\mathbf{U}$ *jsou těmito podmínkami určené jednoznačně.*

Řešení soustavy rovnic pomocí LU-rozkladu I

Následující příklad ukazuje, jak použít LU-rozklad k řešení soustavy lineárních rovnic. Proces zahrnuje tři hlavní kroky:

1. Provedení LU-rozkladu matice koeficientů.
2. Řešení soustavy $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ pro $\mathbf{y}$.
3. Řešení soustavy $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ pro $\mathbf{x}$.

Tento přístup je zvláště užitečný, když potřebujeme řešit více soustav se stejnou maticí koeficientů, ale různými pravými stranami, protože LU rozklad stačí provést pouze jednou.

Řešení soustavy rovnic pomocí LU-rozkladu II

Uvažujme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= -2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Tuto soustavu můžeme zapsat v maticovém tvaru $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Řešení soustavy rovnic pomocí LU-rozkladu III

Z předchozího příkladu víme, že LU-rozklad matice **A** je:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nyní řešíme soustavu $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Řešíme postupně:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ 2y_1 + y_2 &= -2 \quad \Rightarrow \quad y_2 = -2 - 2(1) = -4 \\ -y_1 + \frac{1}{3}y_2 + y_3 &= 7 \quad \Rightarrow \quad y_3 = 7 + 1 - \frac{1}{3}(-4) = \frac{25}{3} \end{aligned}$$

Řešení soustavy rovnic pomocí LU-rozkladu IV

Nyní řešíme soustavu $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ \frac{25}{3} \end{pmatrix}.$$

Řešíme zpětnou substitucí:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{25}{9} \\ 3x_2 - 3x_3 &= -4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{-4 + 3(\frac{25}{9})}{3} = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1 + 1 - \frac{25}{9}}{2} = -\frac{7}{18}. \end{aligned}$$

Řešení soustavy rovnic pomocí LU-rozkladu V

Řešení soustavy rovnic je:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{18} \\ 1 \\ \frac{25}{9} \end{pmatrix}.$$

Můžeme ověřit řešení dosazením do původní soustavy:

$$\begin{aligned} 2(-\frac{7}{18}) - 1 + \frac{25}{9} &= -\frac{7}{9} - 1 + \frac{25}{9} = 1 \\ 4(-\frac{7}{18}) + 1 - \frac{25}{9} &= -\frac{14}{9} + 1 - \frac{25}{9} = -2 \\ -2(-\frac{7}{18}) + 2(1) + \frac{25}{9} &= \frac{7}{9} + 2 + \frac{25}{9} = 7. \end{aligned}$$

Výpočet inverze pomocí LU-rozkladu I

Uvažujme matici **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chceme najít $\mathbf{A}^{-1}$ pomocí LU-rozkladu.

Krok 1: LU-rozklad matice A

Z předchozích příkladů víme, že LU-rozklad matice **A** je:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Výpočet inverze pomocí LU-rozkladu II

Krok 2: Řešení soustavy pro každý sloupec jednotkové matice

Pro nalezení $\mathbf{A}^{-1}$ musíme vyřešit $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$, kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice 3x3.

To znamená, že budeme řešit tři soustavy rovnic $\mathbf{Ax}_i = \mathbf{e}_i$, kde $\mathbf{x}_i$ je i-tý sloupec $\mathbf{A}^{-1}$ a $\mathbf{e}_i$ je i-tý sloupec jednotkové matice.

Pro první sloupec $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$:

Řešíme $\mathbf{Ly} = \mathbf{e}_1$:

$$y_1 = 1,\ 2y_1 + y_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = -2,\ -y_1 + \frac{1}{3}y_2 + y_3 = 0$$

Řešíme $\mathbf{Ux}_1 = \mathbf{y}$: $\quad \Rightarrow \quad y_3 = \frac{1}{3}$

$$x_{13} = \frac{1}{9},\ 3x_{12} - 3x_{13} = -2 \ \Rightarrow \ x_{12} = -\frac{5}{9},\ 2x_{11} - x_{12} + x_{13} = 1,$$

$$\Rightarrow \quad x_{11} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Výpočet inverze pomocí LU-rozkladu III

Pro druhý sloupec $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T$:

Řešíme $\mathbf{Ly} = \mathbf{e}_2$:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 & & \\ 2y_1 + y_2 &= 1 & \Rightarrow \quad y_2 &= 1 \\ -y_1 + \frac{1}{3}y_2 + y_3 &= 0 & \Rightarrow \quad y_3 &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Řešíme $\mathbf{Ux}_2 = \mathbf{y}$:

$$\begin{aligned} x_{23} &= -\frac{1}{9} & & \\ 3x_{22} - 3x_{23} &= 1 & \Rightarrow \quad x_{22} &= \frac{2}{9} \\ 2x_{21} - x_{22} + x_{23} &= 0 & \Rightarrow \quad x_{21} &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Výpočet inverze pomocí LU-rozkladu IV

Pro třetí sloupec $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)^T$:
Řešíme $\mathbf{Ly} = \mathbf{e}_3$:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 & & \\ 2y_1 + y_2 &= 0 & \Rightarrow \quad & y_2 = 0 \\ -y_1 + \frac{1}{3}y_2 + y_3 &= 1 & \Rightarrow \quad & y_3 = 1 \end{aligned}$$

Řešíme $\mathbf{Ux}_3 = \mathbf{y}$:

$$\begin{aligned} x_{33} &= \frac{1}{3} & & \\ 3x_{32} - 3x_{33} &= 0 & \Rightarrow \quad & x_{32} = \frac{1}{3} \\ 2x_{31} - x_{32} + x_{33} &= 0 & \Rightarrow \quad & x_{31} = 0 \end{aligned}$$

Výpočet inverze pomocí LU-rozkladu V

Krok 3: Sestavení inverzní matice
Nyní můžeme sestavit inverzní matici A^{-1} z vypočtených sloupců:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{5}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AA}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{5}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

Tímto jsme úspěšně vypočítali inverzní matici pomocí LU-rozkladu a ověřili její správnost.