Markovovy řetězce

Uvažujme nějakou soustavu, kterou sledujeme v diskrétních časových okamžicích $t = 0, 1, 2, \dots$ a která se může nacházet v n různých stavech, které reprezentujeme hodnotami $1, 2, \dots, n$. Při posunu z jednoho časového okamžiku do okamžiku následujícího může soustava přejít ze stávajícího stavu do jiného stavu. Předpokládejme, že pro libovolná $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ pravděpodobnost toho, že soustava v jednom kroku přejde ze stavu i do stavu j, je rovna hodnotě p_{ij}. To znamená, že tato pravděpodobnost závisí pouze na tom, v jakém stavu je soustava v přítomném okamžiku, nezávisí tedy na tom, jakými stavy soustava prošla v minulosti. Tato pravděpodobnost rovněž nezávisí na tom, ve kterém časovém okamžiku k uvažovanému přechodu dochází. V této situaci mluvíme o homogenním Markovově řetězci s diskrétním časem.

Pro pravděpodobnosti přechodu p_{ij} homogenního Markovova řetězce platí, že $0 \leqslant p_{ij} \leqslant 1$ pro všechna $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ a $p_{i1} + p_{i2} + \cdots + p_{in} = 1$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Tyto pravděpodobnosti můžeme sestavit do čtvercové matice

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} = \left(p_{ij}\right)_{i,j=1,2,\dots,n}.$$

Tuto matici nazýváme maticí pravděpodobností přechodu. Prvky této matice jsou nezáporná čísla a součet prvků v každém řádku je roven jedné. Matice s touto vlastností nazýváme stochastické matice.

Nechť pro libovolný časový okamžik $t = 0, 1, 2, \ldots$ a pro libovolný stav $i \in \{1, 2, \ldots .n\}$ je pravděpodobnost toho, že soustava se v čase t nachází ve stavu i dána hodnotou $p_i(t)$. Pak ovšem pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots .n\}$ platí $0 \leqslant p_i(t) \leqslant 1$ a také platí $p_1(t) + p_2(t) + \cdots + p_n(t) = 1$. Tyto pravděpodobnosti zapisujeme ve tvaru pravděpodobnostího vektoru

$$\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t)).$$

Součet všech složek tohoto vektoru je roven jedné.

Zkoumejme nyní, jak se složky vektoru $\mathbf{p}(t+1)$ vypočtou pomocí složek vektoru $\mathbf{p}(t)$ a pomocí matice pravděpodobností přechodu P. Pro každé $j \in \{1, 2, \ldots .n\}$ platí, že $p_j(t+1) = p_1(t)p_{1j} + p_2(t)p_{2j} + \cdots + p_n(t)p_{nj}$. Zapsáno pomocí násobení vektorů a matic to znamená, že platí

$$\mathbf{p}(t+1) = \mathbf{p}(t) \cdot P.$$

Tento postup lze iterovat. Analogicky dostáváme, že platí

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t-1) \cdot P.$$

Odtud a z předchozího vztahu plyne, že

$$\mathbf{p}(t+1) = \mathbf{p}(t-1) \cdot P \cdot P = \mathbf{p}(t-1) \cdot P^2.$$

Takto lze pokračovat dále. Nakonec tímto způsobem obdržíme, že pro každý časový okamžik $t = 1, 2, \ldots$ platí

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) \cdot P^t.$$

Abychom tedy mohli určit složky vektoru $\mathbf{p}(t)$, musíme vedle matice pravděpodobností přechodu P znát také vektor počátečních pravděpodobností

$$\mathbf{p}(0) = (p_1(0), p_2(0), \ldots, p_n(0)),$$

tedy pravděpodobností toho, v jakém stavu se soustava nachází v okamžiku 0.