1. cvičení z M1110 – komplexní čísla, podzim 2024

Příklad. 1. Číselné množiny, se kterými budeme počítat, jsou přirozená čísla $\mathbb{N}$, celá čísla $\mathbb{Z}$, racionální čísla $\mathbb{Q}$ a reálná čísla $\mathbb{R}$. Stručně si připomeňte vlastnosti sčítání a násobení na jednotlivých množinách.

Příklad. 2. Zavedení komplexních čísel $\mathbb{C}$. Pro každé reálné číslo x platí, že $x^2 \geq 0$. Proto neexistuje reálné číslo s vlastností $x^2 = -1$.
Základní myšlenka zavedení komplexních čísel: Chceme rozšířit množinu reálných čísel a operace sčítání a násobení tak, aby

(1) rovnice $x^2 = -1$ měla řešení,
(2) sčítání a násobení komplexních čísel mělo stejné vlastnosti jako sčítání a násobení reálných čísel.

To lze realizovat takto:

a) K reálným číslům přidáme číslo i, takové že $\mathrm{i}^2 = -1$.
b) Dále přidáme všechny reálné násobky čísla i, to jsou čísla $a\,\mathrm{i}$, kde $a \in \mathbb{R}$. S nimi počítáme takto:
$$0\,\mathrm{i} = 0, \quad 1\,\mathrm{i} = \mathrm{i}, \quad a\,\mathrm{i} + b\,\mathrm{i} = (a+b)\,\mathrm{i}, \quad (a\,\mathrm{i}) \cdot (b\,\mathrm{i}) = ab\,\mathrm{i}^2 = -ab.$$
c) Dále přidáme všechny možné součty reálných čísel a násobků čísla i, to jsou čísla $a + b\,\mathrm{i}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. S nimi počítáme podle komutativity a asociativity sčítání a násobení a podle distributivity násobení vzhledem ke sčítání takto:
$$0 + b\,\mathrm{i} = b\,\mathrm{i}$$
$$(a + b\,\mathrm{i}) + (c + d\,\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\,\mathrm{i},$$
$$(a + b\,\mathrm{i}) \cdot (c + d\,\mathrm{i}) = ac + ad\,\mathrm{i} + bc\,\mathrm{i} + bd\,\mathrm{i}^2 = (ac - bd) + (ad + dc)\,\mathrm{i}\,.$$

Příklad. 3. Množina komplexních čísel $\mathbb{C}$ má neutrální prvek pro sčítání a neutrální prvek pro násobení stejný jako množina reálných čísel.
Pro komplexní číslo $z = a + b\,\mathrm{i}$ definujeme komplexní číslo sdružené $\bar{z} = a - b\,\mathrm{i}$.

(1) Vypočtěte $z + \bar{z}$ a $z \cdot \bar{z}$. Na základě toho ukažte, že obě tato čísla jsou reálná. Definujeme absolutní hodnotu čísla z jako
$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$
(2) Dokažte, že pro absolutní hodnoty komplexních čísel z a v platí
$$|z + v| \leq |z| + |v| \quad \text{a} \quad |z \cdot v| = |z| \cdot |v|.$$
(3) K nenulovému komplexnímu číslu $z = a + b\,\mathrm{i}$ vypočtěte jeho převrácené číslo. Jednak pomocí z a $\bar{z}$, jednak pomocí a a b.
(4) Spočtěte podíl dvou komplexních čísel, $a + b\,\mathrm{i}$ děleno $c + d\,\mathrm{i}$, je-li $c + d\,\mathrm{i} \neq 0$.
(5) Pro každé reálné číslo a najděte všechna komplexní řešení rovnice
$$z^2 = a.$$

Příklad. 4. Spočítejte

(1) $(3-4i)(5+6i)$, $(7+3i)(4+6i)$, $(1+2i)(-6+11i)$.

(2) $\dfrac{3-4i}{5+6i}, \dfrac{7+3i}{4+6i}, \dfrac{1+2i}{-6+11i}$

Příklad. 5. Uvažujme kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty

$$ax^2 + bx + c = 0$$

se záporným diskriminantem $D = b^2 - 4ac < 0$. Odvoďte, že v komplexním oboru má řešení

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-D}}{2a}.$$

Pomocí toho vyřešte rovnici $3x^2 - 4x + 6 = 0$.

Příklad. 6. Goniometrický tvar komplexních čísel. Každé komplexní číslo $z \neq 0$ lze psát v tzv. goniometrickém tvaru takto:

$$z = a + ib = \sqrt{a^2+b^2}\Big(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \mathrm{i}\,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big) = |z|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$$

pro právě jeden úhel $\alpha \in [0, 2\pi)$.
Nakreslete si k tomu obrázek v rovině s reálnou a imaginární osou. Komplexní čísla $\cos\alpha + \mathrm{i}\cos\alpha$ vyplní jednotkovou kružnici. Nazýváme je komplexní jednotky. jejich převrácené číslo je číslo komplexně sdružené, tedy opět komplexní jednotka.
Napište následující komplexní čísla v goniometrickém tvaru:

$$8, -6i, 3 + 3\,\mathrm{i}, 5 - 5\,\mathrm{i}, 1 + \sqrt{3}, -\sqrt{3} + 3.$$

Příklad. 7. Geometrický význam násobení komplexních čísel. Dokažte, že pro součin komplexních čísel zapasaných v goniometrickém tvaru platí

$$r(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)\cdot q(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta) = r\cdot q(\cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta).$$

Na základě toho indukcí dokažte, že pro všechna přirozená čísla platí

$$[r(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)]^n = r^n(\cos(n\alpha) + \mathrm{i}\sin(n\alpha)).$$

Příklad. 8. Zobrazení v rovině reprezentovaná komplexními čísly. Představme si rovinu s počátkem. Komplexní číslo $z = a + b\,\mathrm{i}$ ztotožníme s bodem roviny o souřadnicích $[a, b]$. Následudující zobrazení $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ interpretujte jako zn8m8 geometrická zobrazení v rovině:

(1) $f(z) = -z$,
(2) $f(z) = \bar{z}$,
(3) $f(z) = z + v$, kde v je pevně zvolené komplexní číslo,
(4) $f(z) = tz$, kde $t \in \mathbb{R}$ je pevně zvolené číslo,
(5) $f(z) = (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)\cdot z$, kde φ je pevně zvolený úhel.

Příklad. 9*. V rovině uvažujme vektory začínající v počátku a končící v nenulových komplexních číslech $z = a + b\,\mathrm{i}$ a $v = c + d\,\mathrm{i}$. Jak spočítáme pomocí operací s komplexními čísly cosinus a sinus jejich odchylky?

Návod. Představte si komplexní čísla v goniometrrickém tvaru. □

Příklad. 10*. Pomocí zobrazení $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ popište symetrii v rovině podle osy, která svírá s osou x úhel α.

Návod. Osa symetrie je určena komplexním číslem $\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$. Využijte toho, že umíte popsat symetrii podle osy x a skládaní zobrazení. Osu symetrie nejdříve otočíme do osy x, provedeme symetrii podle osy x a výsledek otočíme o úhel α. □