

2. cvičení z M1110 – soustavy rovnic, podzim 2024

Příklad 1. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= -2 \\2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 &= 1 \\x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0 \\x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0\end{aligned}$$

Řešení. Nemá řešení. □

Příklad 2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 0 \\2x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= -1 \\x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= 1\end{aligned}$$

Řešení. $[-1, 0, 1, 0, 0] + s(0, 0, 1, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 0, 1)$ □

Příklad 3. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\2x_1 - x_2 - 3x_4 &= 2 \\3x_1 - x_3 + x_4 &= -3 \\2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= -6\end{aligned}$$

Řešení. Jediné řešení. □

Příklad 4. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}2x_1 - 3x_2 + 17x_3 - 29x_4 - 36x_5 &= 22 \\2x_1 - 3x_2 + 18x_3 - 27x_4 + 33x_5 &= 21 \\12x_1 - 18x_3 + 102x_3 - 174x_4 - 216x_5 &= 132 \\2x_1 - 3x_2 + 21x_3 - 24x_4 - 30x_5 &= 20 \\2x_1 - 3x_2 + 24x_3 - 21x_4 - 27x_5 &= 19\end{aligned}$$

Příklad 5. Řešte soustavu rovnic pro neznámé x, y, z v závislosti na hodnotách parametru $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}x + y + az &= 1 \\x + ay + z &= a \\ax + y + z &= a^2\end{aligned}$$

Řešení. Po řádkových úpravách dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & a^2-1 \end{array} \right)$$

Pro $a = 1$ má soustava nekonečně mnoho řešení závislých na dvou parametrech. Pro $a = 2$ nemá soustava řešení. Pro ostatní a má jediné řešení. □

Příklad. 6. Najděte všechny dvojice parametrů $a, b \in \mathbb{R}$, pro které je množina řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x + y + az &= 1 \\x + ay + 2z &= 1 \\ax + y + 3z &= b\end{aligned}$$

o neznámých $x, y, z \in \mathbb{R}$

- (a) prázdná,
- (b) nekonečná.

V druhém případě soustavu vyřešte.

Řešení. Po řádkových úpravách dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & 5-a-a^2 & b-a \end{array} \right)$$

Řešte zvlášť pro $a = 1$, kdy matice není ve schodovitém tvaru, a pro kořeny polynomu $a^2 + a - 5$. □