3. cvičení z M1110 – násobení matic, podzim 2024

Příklad. 1. Zjistěte, zda jde matice násobit , a pokud ano, vynásobte je.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -5 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -5 \\ 9 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 21 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 21 & 5 \end{pmatrix}$$

Příklad. 2. Napište nějaké matice tvaru 5×4 a 4×3 a vynásobte je.

Příklad. 3. Nechť $A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vypočtěte $A^2 = A \cdot A$ a $A^3 = A \cdot A \cdot A$.

Příklad. 4. Vynásobte následující dvě matice a výsledek vyčíslete s použitím součtových vzorců pro goniometrické funkce

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\cos\beta \\ r\sin\beta \end{pmatrix}.$$

Na základě toho ukažte, že zobrazení

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

je otočení kolem počátku v rovině o úhel α.

Příklad. 5. Pro všechny elementární řádková operace op na maticích o k řádcích platí

$$\mathrm{op}(E_k) \cdot A = \mathrm{op}(A),$$

kde symbol $\mathrm{op}(A)$ znamená provedení operace na matici A tvaru $k \times n$ a E_k je jednotková matice tvaru $k \times k$. Ukažte pro nějakou konkrétní matici A.

Následující příklady ukazují aplikace násobení matic.

Příklad. A. Mějme orientovaný graf s n uzly. V něm jsou některé dvojice uzlů spojeny orientovanou hranou. Tomuto grafu můžeme přiřadit matici A tvaru $n \times n$ takovou, že $A_{ij} = 1$, jestliže existuje orientovaná hrana z uzlu i do uzlu j, a $A_{ij} = 0$, jestliže taková hrana neexistuje. Jaký význam mají prvky matice A^2, tj. čísla $(A^2)_{ij}$. Jaký význam mají prvky matice A^3?

Příklad. B. Markovovův proces. Uvažujme časovou stupnici $t = 0, 1, 2, \dots$ a časově proměnný proces, který nabývá stavů $i = 1, 2, \dots, n$. Pravděpodobnost, že je proces ve stavu i v čase t je dána číslem $p_i(t) \in [0, 1]$. Dále uvažujme matici M tvaru $n \times n$, kde číslo $M_{ij} \in [0, 1]$ je pravděpodobnost, že mezi časem t a $t + 1$ přejde proces ze stavu j do stavu i. Ukažte, že

(1) součet prvků v každém sloupci matice M je roven 1,
(2) platí
$$\begin{pmatrix} p_1(t+1) \\ p_2(t+1) \\ \dots \\ p_n(t+1) \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \dots \\ p_n(t) \end{pmatrix}$$
.

Pomocí Markovova procesu řešte **úlohu o mlsném hazardérovi**. Hazardér má dvě kremrole a hází mincí. Padne-li orel vyhrává další kremroli, padne-li panna, musí jednu kremroli vrátit. Hra končí, jestliže má hazardér 5 kremrolí nebo žádnou. Jaká je pravděpodobnost, že hra skončí nejpozději po 4 kolech?

Návod: Popište situaci jako Markovovův proces a napište vhodnou Markovovu matici M. Výslednou pravděpodobnost spočítejte pomocí maticového násobení.

Příklad. C. Leslieho populační model. Uvažujme populaci o třech generacích. To, jak se mění tato populace mění za délku období jedné generace popisuje tzv. Leslieho matice L. Čísla L_{11}, L_{12} a L_{13} popisují porodnost první, druhé a třetí generace. Čísla L_{21} a L_{32} udávají postupně, jaká část jedinců první generace přežije do 2. generace a jaká část jedinců 2. generace přežije do 3. generace. Ostatní prvky matice jsou nulové.
Označme $x_i(t)$ počet jedinců i-té generace v čase t. (Období mezi t a $t+1$ odpovídá výměně generací.) Ukažte, že platí
$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

Napište Leslieho matici pro následující situaci: Farmář chová ovce. Jejich porodnost je dána pouze věkem a je průměrně 2 ovce na jednu ovci mezi jedním a dvěma lety věku, 4 ovce na jednu ovci mezi dvěma a třemi lety věku a 2 ovce na jednu ovci mezi třemi a čtyřmi roky věku. Ovce do jednoho roku nerodí. Z roku na rok umře vždy polovina ovcí a to rovnoměrně ve všech věkových skupinách. Po 4 letech posílá farmář ovce na jatka.

Příklad. 6. Matice A a B tvaru $n \times n$ jsou dány předpisem:
$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \geq j, \\ 2, & \text{if } i < j, \end{cases} \qquad B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \leq j, \\ 3, & \text{if } i > j. \end{cases}$$
Vypočtěte, čemu se rovná jejich součin.

Návod: Napište si tyto matice například pro $n = 6$. Zkuste si provést jejich násobení. Pro obecné n spočtěte $(A \cdot B)_{ij}$ zvlášť pro $i \leq j$ a pro $i \geq j$.

Příklad. 7. Vypočtěte B^n, jestliže $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Návod: Dokažte indukcí, že $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 3n(n-1) \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Příklad. 8. Vypočtěte $C^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n$.

Návod: Spočtěte si C^2, C^3 a C^4. Pomocí toho si udělejte hypotézu, čemu se rovná C^n, a tu dokažte indukcí.