4. cvičení z M1110 – inverzní matice a LU rozklad, podzim 2024

Příklad. 1A. Pomocí zpětné Gaussovy eliminace spočtěte inverzní matici k matici A a proveďte zkoušku.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 2 & 11 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

□

Příklad. 1B. Spočítejte LU rozklad matice A z předchozí úlohy.

Návod. Chceme najít dolní trojúhelníkovou matici L a horní trojúhelníkovou matici U tak, že $A = L \cdot U$. Matici U můžeme dostat Gaussovou eliminací matice A na schodovitý tvar bez použití výměny řádků a násobení řádků. Jestliže při úpravách od i-řádku odečítáme l_{ik} násobek k-tého řádku od i-tého řádku:

$$\text{new row}_i = \text{old row}_i - l_{ik}\text{row}_k,$$

pak l_{ik} je člen matice L v i-tém řádku a k-tém sloupci pro $i > k$, $l_{jj} = 1$ a $l_{ij} = 0$ pro $i < j$. □

Řešení.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{11}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

□

Příklad. 1C. Řešte soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & + & 2z & = & a \\ x & - & y & - & 3z & = & b \\ 2x & + & y & + & 2z & = & c \end{array}$$

nejdříve pomocí znalosti inverzní matice a potom pomocí znalosti LU rozkladu.

Příklad. 2. Spočtěte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 & -2 \\ -1 & -6 & -11 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zkoušku proveďte aspoň částečně.

Řešení. Inverzní matice je

$$\begin{pmatrix} 154 & -179 & -205 & 235 \\ -36 & 42 & 48 & -55 \\ 6 & -7 & -8 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad. 3. Spočtěte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proveďte zkoušku.

Příklad. 4. Spočtěte inverzní matici k matici tvaru $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \dots & 1 & 1 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 2-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2-n \end{pmatrix}.$$

Návod. K 1. řádku přičtěte ostatní řádky. □

Příklad. 5. Pomocí algoritmu pro výpočet inverzní matice dokažte:

(1) Dolní troj[helníková matice L má inverzní matici, právě když má na uhlopříčce pouze nenulová čísla.
(2) Inverzní matice k dolní trojúhelníkové je dolní trojúhelníková.
(3) Analogická tvrzení pro horní trojúhelníkové matice.

Příklad. 6. Najděte příklad matice 2×2, která nemá LU rozklad.

Příklad. 7. Pro matici

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

najděte dolní trojúhelníkovou L, horní trojúhelníkovou U a matici P, která má v každém řádku a sloupci právě jednu jedničku a jinak samé nuly tak, že platí

$$P \cdot A = L \cdot U.$$

Návod. V matici A provedeme permutaci řádků tak, abychom mohli provést LU rozklad. Permutace řádků odpovídá násobení nějakou maticí P zleva. □