5. cvičení z M1110 - vektorové prostory a lineární zobrazení, podzim 2024

Příklad. 1. Zopakujte si, že $\mathbb{K}^n$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ pro $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Ukažte, že $\mathbb{C}^n$ je také vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Příklad. 2. Ukažte, že každá reálná matice A tvaru $k \times n$ zadává lineární zobrazení

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Platí i obrácené tvrzení, každé lineární zobrazení z R^n do $\mathbb{R}^k$ lze psát pomocí násobení maticí tak, jak je uvedeno výše. To si ale dokážeme později.

Příklad. 3. Ukažte, že následující množiny lze opatřit vhodnou operací sčítání a násobení skalárem tak, aby se s těmito operacemi staly vektorovými prostory nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

(a) Množina $\mathbb{R}[x]$ všech polynomů s reálnými koeficienty.
(b) Množina $\mathbb{C}_s[x]$ všech polynomů s komplexními koeficienty stupně nejvýše s.
(c) Množina $\mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{R})$ matic tvaru $k \times n$ s reálnými čísly.
(d) Množina $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ všech posloupností reálných čísel.
(e) Množina $\{f : M \to \mathbb{C}\}$ všech zobrazení nějaké neprázdné množiny M do komplexních čísel.

Příklad. 4. Rozhodněte, zda následující zobrazení mezi vektorovými prostory jsou lineární.

(a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi(x_1, x_2) = 2x_1 + x_1x_2,$
(b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, 5x_2, x_1 - x_2),$
(c) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(p) = (p(1), p(2)^2),$
(d) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(p) = (p(1), p(2)).$

Příklad. 5. Ukažte, že množina $U = \mathbb{R}^3$ s operacemi

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3), \quad a \odot (x_2, x_2, x_3) = (ax_1, x_2, x_3)$$

není vektorový prostor. Zjistěte, které axiomy vektorového prostoru jsou splněny a které nikoliv.

Příklad. 6. Ukažte, že množina

$$U = (0, \infty)$$

společně s operacemi

$$x \oplus y = xy, \quad a \odot x = x^a$$

tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Příklad. 7. Ukažte, že exponenciální funkce $x \mapsto 2^x : \mathbb{R} \to (0., \infty)$ je lineární zobrazení vektorového prostoru $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ do vektorového prostoru $(U = (0, \infty), \oplus, \odot)$ z předchozího příkladu. Najděte nějaké lineární zobrazení, které vede z U do $\mathbb{R}$.