6. cvičení z M1110 – lineární obal a vektorové podprostory, podzim 2024

Příklad. 1. Zopakujte si definici lineární kombinace vektorů a lineárního obalu konečné množiny vektorů. Představme si vektorový prostor $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$ geometricky jako rovinu s počátkem (to je nulový vektor). Najděte podle definice

(a) Lineární obal jediného nenulového vektoru.
(b) Lineární obal nulového vektoru.
(c) Lineární obal dvou vektorů, které neleží v jedné přímce procházející počátkem.

Popište lineární obaly geometricky. Co je lineární obal dvou vektorů v prostoru $\mathbb{R}^3$?

Příklad. 2. Zopakujte si definici vektorového podprostoru. Najděte všechny vektorové podprostory ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$. Postupujte "gemetricky"s využitím definice a předchozí úlohy.

Příklad. 3. Dokažte podle definice, že

(a) Každý lineární obal je vektorový podprostor.
(b) Množina řešení homogenní soustavy rovnic $Ax = 0$ s maticí A tvaru $n \times k$ je vektorový podprostor.

Příklad. 4. Rozhodněte, zda následující podmnožiny vektorových prostorů jsou vektorové podprostory.

(a) $V = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) |\ a_{11} + a_{22} = 1\} \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,
(b) $U = \{f \in \mathbb{R}[x] |\ f(3) = 0,\ f(-1) = 0\} \subset \mathbb{R}[x]$,
(c) $Z = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} |\ f(n+1) = f(n) + f(n-1)\} \subset \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$.

Příklad. 5. Uvažujme v $\mathbb{R}^5$ vektory

$$v_1 = (1, 2, 1, 0, 1), \quad v_2 = (2, -1, 0, 1, 1), \quad v_3 = (1, -3, -1, 1, 0), \quad u = (1, 7, 3, -1, 2),$$

Zjistěte, zda vektor u leží v lineárním obalu $[v_1, v_2, v_3]$.

Příklad. 6. V prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ zjistěte, zda polynom $1 + 3x + 5x^2 + 10x^3$ leží v lineárním obalu

$$[1 + x + 2x^2 - x^3, 1 + 2x + x^3, 1 + x + 3x^2 - x^3, 2 + 2x + 4x^2 + 5x^3].$$

Pokud ano, napište ho jako konkrétní lineární kombinaci daných polynomů.

Řešení. $(-10, 2, 7, 1)$ □

Příklad. 7. Podprostor U v $\mathbb{R}^5$ je množinou všech řešení homogenní soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 8x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \end{array}$$

Napište jej jako lineární obal několika vektorů.

Příklad. 8. Rozhodněte, zda platí:

(a) $[(4, 0, -2, 6), (2, 1, -2, 3), (3, 1, -2, 4)] = \mathbb{R}^4$,

(b) $[(1,-1,0,2),(2,2,-1,3),(0,1,1,0),(2,1,-2,3),(3,1,-2,4)] = \mathbb{R}^4$.

Příklad. 9. Nechť U je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a nechť $u, v, w \in U$. Dokažte rovnost lineárních obalů

$$[u, v, w, 2u - 3v + 10w] = [u, v, w] = [u, v, 2u - 3v + 10w].$$