7. cvičení z M1110 – lineární nezávislost a báze, podzim 2024

Příklad. 1. Zopakujte si defini lineární nezávislosti vektorů. Podle definice zjistěte nejdříve v $\mathbb{R}^2$ a potom v libovolné prostoru zjistěte:

(a) Kdy jsou lineárně nezávislé dva vektory. Co to znamená geometricky?
(b) Kdy je lineárně nezávislý jeden vektor?
(c) Co gemetricky znamená, že jsou tři vektory lineárně závislé a co znamená, že jsou nezávislé.

Příklad. 2. Zjistěte, zda jsou vektory $v_1 = (1, -1, 0, 2)$, $v_2 = (2, 2, -1, 3)$, $v_3 = (0, 1, 1, 0)$ a $v_4 = (3, 2, 0, 5)$ ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ lineárně závislé nebo nezávislé.

Příklad. 3. Zjistěte, zda jsou polynomy $x^2 + x + 1$, $2x^2 + 2$, $x^2 - x$ ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ lineárně závislé nebo nezávislé.

Příklad. 4*. Zjistěte, zda jsou následující funkce ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ lineárně závislé nebo nezávislé:

(1) x^2, $|x|$, $\sqrt{|x|}$,
(2) $(\sqrt{x^2} + 1)^2$, $(\sqrt{x^2} - 1)^2$, $x^2 + 1$,
(3) $\sin x, \cos x, \sin 2x$.

Příklad. 5. S použitím algoritmu z přednášky vyberte z vektorů $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \in \mathbb{R}^4$ lineárně nezávislé se stejným lineárním obalem.

$$u_1 = (1, 2, 3, -1),\ u_2 = (-1, 3, 2, 4),\ u_3 = (1, 1, 4, -6),\ u_4 = (3, 5, 10, -8),\ u_5 = (1, 1, 1, 1).$$

Příklad. 6. Napište dvě různé báze vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{3x3}(\mathbb{R})$ všech reálných matic tvaru 3×3. Dále najděte báze podprostorů:

(1) $U \subseteq \mathrm{Mat}_{3x3}(\mathbb{R})$ všech symetrických matic,
(2) $V \subseteq \mathrm{Mat}_{3x3}(\mathbb{R})$ všech antisymetrických matic,
(3) $W \subseteq \mathrm{Mat}_{3x3}(\mathbb{R})$ všech matic s nulovou stopou.

Příklad. 7. Najděte bázi podprostoru $M \subseteq \mathbb{R}^5$ všech řešení homogenní soustavy rovnic.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & + & 6x_5 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \end{array}$$

a doplňte ji do báze celého prostoru $\mathbb{R}^5$.

Příklad. 8. Najděte báze podprostorů prostoru $\mathbb{R}_3[x]$:

(1) $K = \{p \in \mathbb{R}_3[x] :\ p(-x) = -p(x),\ p(1) = 0\}$,
(2) $L = \{p \in \mathbb{R}_3[x] :\ p(x) - 2xp'(x) = 0\}$, kde p' značí derivace polynomu p.

Příklad. 9. Dokažte z definice báze: Je-li $u_1, u_2.u_3.u_4$ báze prostoru U, pak $u_1+u_4, u_3, u_2+u_3+u_4, u_1+2u_3$ je rovněž báze prostoru U.

Příklad. 10*. Nechť U je vektorový prostor všech nekonečných posloupností reálných čísel. Ukažte, že jeho podprostor

$$F = \{(a_i)_{i=1}^{\infty} \in U : \ a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \ n \geq 2\}$$

má bázi tvořenou dvěma vektory.

Dále se pokuste ukázat, že celý prostor nemá bázi tvořenou konečným seznamem vektorů.