8. cvičení z M1110 – Průniky a součty podprostorů, podzim 2024

Příklad. 1. Spočtěte souřadnice polynomu $1 + 3x + 5x^2 + 10x^3$ v bázi

$$\alpha = (1 + x + 2x^2 - x^3, 1 + 2x + x^3, 1 + x + 3x^2 - x^3, 2 + 2x + 4x^2 + 5x^3)$$

prostoru $\mathbb{R}_3[x]$.

Řešení. $(-10, 2, 7, 1)$ □

Příklad. 2. Najděte báze a dimenze součtu a průniku podprostorů P a Q v $\mathbb{R}^4$, jestliže

$$P = [(4, 0, -2, 6), (2, 1, -2, 3), (3, 1, -2, 4)],$$
$$Q = [(1, -1, 0, 2), (2, 2, -1, 3), (0, 1, 1, 0)].$$

Řešení. Průnik má dimenzi 2 a bázi např. $(1, -1, 0, 2), (-2, -1, 2, -3)$. □

Příklad. 3. Najděte báze a dimenze součtu a průniku podprostorů K a L v $\mathbb{R}^4$, jestliže

$$K = [(1, 2, 0, 3), (0, 1, 1, 2), (2, 0, 1, 1)],$$
$$L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4;\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0\}.$$

Návod. Průnik najděte přímo, bez hledání báze podprostoru L. Součet najděte pomocí formulky pro dimenze. □

Příklad. 4. Najděte báze a dimenze podprostorů

$$P = \{f \in \mathbb{R}_4[x] |\ f(1) = 0,\ f(2) = 0\} \quad \text{a} \quad Q = \{g \in \mathbb{R}_4[x] |\ g(x) = g(-x)\}$$

a báze a dimenze jejich průniku a součtu.

Řešení. $\dim P = 3$, $\dim Q = 3$, $\dim P \cap Q = 1$, $\dim P + Q = 5$, tedy $P + Q = \mathbb{R}_4[x]$. □

Příklad. 5. Nechť $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ je báze prostoru U. Souřadnice vektoru $v \in U$ v této bázi jsou jsou

$$(v)_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Najděte souřadnice vektoru v v bázi $\beta = (u_3, u_1 + 2u_2, u_1 - u_2 + 2u_3)$.

Příklad. 6. Najděte báze a dimenze následujících vektorových prostorů:

(1) $U = \{A \in \mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{R});\ A$ je antisymetická matice$\}$ nad $\mathbb{R}$,
(2) $\mathbb{C}_2[x]$ jako vektorového prostoru nad $\mathbb{R}$,
(3) $\mathbb{R}^M$ nad $\mathbb{R}$, kde M je konečná množina.

Příklad. 7.* (Vracíme se k příkladu 10 z předchozího cvičení.) Ukažte, že vektorový prostor $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ všech posloupností reálných čísel nemá nad $\mathbb{R}$ konečnou dimenzi. Zjistěte prvně, jak je to s dimenzí vektorového podprostoru

$$W = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}; \exists n \in \mathbb{N}\ \forall i \geq n :\ f(i) = 0\}.$$