9. cvičení z M1110 – lineární zobrazení, podzim 2024

Příklad. 1. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujme bázi $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1)$. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení, o němž víme, že

$$\varphi(u_1) = u_1,\ \varphi(u_2) = u_3,\ \varphi(u_3) = u_2.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 tak, aby v souřadnicích standardní báze bylo $\varphi(x) = Ax$.

Příklad. 2. Nechť φ je zobrazení $\mathbb{R}^3$ do sebe, které je symetrií podle roviny $x_1 - x_3 = 0$.

(1) Najděte matici B takovou, že v souřadnicích standardní báze je $\varphi(x) = Bx$.
(2) Najděte všechny vektory $u \in \mathbb{R}^3$ takové, že platí $\varphi(u) = u$.
(3) Najděte všechny vektory $v \in \mathbb{R}^3$ takové, že platí $\varphi(v) = -v$.
(4) Předchozí vektory se nazývají vlastní vektory. Ukažte, že mezi nimi lze najít bázi celého $\mathbb{R}^3$.

Příklad. 3. Najděte bázi jádra a obrazu lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ zadaného předpisem

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 8x_4 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 4. Najděte nějaké lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takové, že

$$\ker f = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad \text{a} \quad \operatorname{im} f = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Příklad. 5. Nechť je lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ zadáno svými hodnotami na vektorech báze prostoru $\mathbb{R}^4$.

$$\varphi(1, 2, 2, 2) = (1, -5, 4),\ \varphi(0, 1, 2, 2) = (1, 2, -3),\ \varphi(0, 0, 1, 2) = (2, -3, 1),$$
$$\varphi(0, 0, 0, 1) = (-3, 1, 2).$$

Najděte bázi jeho jádra a obrazu.

Příklad. 6. Napište konkrétní předpis lineárního zobrazení $F : \mathbb{R}_{100}[x] \to \mathbb{R}^{50}$ takového, že $\dim \ker F = 70$.

Příklad. 7*. Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární zobrazení a $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$. Dokažte: Jsou-li $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_k) \in V$ lineárně nezávislé, pak jsou rovněž $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$ lineárně nezávislé.