10. cvičení z M1110 – matice lineárního zobrazení,vlastní vektory, podzim 2024

Příklad. 1. Nechť $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^4[x]$ je lineární zobrazení zadané předpisem

$$\varphi(p) = (x^2 + 1)p'(x),$$

kde p' je derivace polynomu p. Najděte matici $(\varphi)_{\beta,\alpha}$ zobrazení φ v bázích $\alpha = (1, x, x^2, x^3)$ prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ a $\beta = (x^4, x^3, x^2, x, 1)$ prostoru $\mathbb{R}_4[x]$. (Pozor na pořadí vektorů v bázi.)

Příklad. 2. Nechť φ je zobrazení $\mathbb{R}^3$ do sebe, které je symetrií podle roviny $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$. Pomocí geometrické představy o tomto zobrazení najděte všechny vlastní vektory k vlastnímu číslu 1 a všechny vlastní vektory k vlastnímu číslu -1. Potom najděte podle definice matici $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = A$ tohoto zobrazení v bázi α složené z vlastních vektorů. Dále podle definice najděte matici $(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = B$ ve standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.

Příklad. 3. Najděte podle definice matici $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadaného předpisem

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

v bázi $\alpha = ((1, 1, 2)^T, (1, 0, 1)^T, (1, 2, 2)^T)$.

Příklad. 4. Najděte podle definice matici lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadaného předpisem

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

v bázích $\alpha = ((1, 0, 1)^T, (1, 1, 2)^T, (1, -1, 2)^T)$ a $\beta = ((1, 2)^T, (2, 3)^T)$.

Příklad. 5. Najděte matici $(\mathrm{id})_{\beta,\alpha}$ identického zobrazení zobrazení $\mathrm{id}(: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, kde $\alpha = (x^2 + x + 1, x + 2, x^2 - x)$ a $\beta = (x^2 + 1, x^2 - x - 1, x + 1)$. Najděte rovněž matice $(\mathrm{id})_{\alpha,\alpha}$ a $(\mathrm{id})_{\beta,\beta}$.

Příklad. 6. Nechť lineární zobrazení $\varphi : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ má v bázích

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

a

$$\beta = (x^2 - 2x + 3, x + 2, 2x^2 - 1)$$

matici

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Najděte předpis

$$\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \dots .$$