11. cvičení z M1110 – matice lineárního zobrazení a matice přechodu, podzim 2024

Příklad. 1. Najděte matici přechodu $(\mathrm{id})_{\beta,\alpha}$ mezi bázemi $\alpha = (x^2 + x + 1, x + 2, x^2 - x)$ a $\beta = (x^2 + 2, x^2 - x - 1, x + 1)$ prostoru $\mathbb{R}_3[x]$.

Spočtěte ji prvně přímo z definice a potom pomocí matic přechodu $(\mathrm{id})_{\varepsilon,\alpha}$ a $(\mathrm{id})_{\varepsilon,\beta}$, kde $\varepsilon = (x^2, x, 1)$.

Uvědomte si na tomto příkladě, že s maticemi přechodu se počítá jinak s bázemi a jinak se souřadnicemi. S bázemi zapisovanými do řádku takto:

$$\alpha = \beta(\mathrm{id})_{\beta,\alpha},$$

ale se souřadnicemi vektorů takto:

$$(u)_\beta = (\mathrm{id})_{\beta,\alpha}(u)_\beta.$$

Napište analogické vztahy pro matice obecných lineárních zobrazení.

Příklad. 2. Na některém z předchozích cvičení jsme hledali matici lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadaného předpisem

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

v bázích $\alpha = ((1, 0, 1)^T, (1, 1, 2)^T, (1, -1, 2)^T)$ a $\beta = ((1, 2)^T, (2, 3)^T)$ přímo z definice. Tentokrát ji spočítejte pomocí "vzorečku" s maticemi přechodu, kde se vyskytují standardní báze $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$.

Příklad. 3. Najděte předpis pro složené zobrazení $\psi \circ \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$(\psi \circ \varphi) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

dvou lineárních zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadaných na vektorech bází takto:

$$\varphi(1, 0, 1) = (4, 1),\ \varphi(1, 1, 2) = (9, 1),\ \varphi(1, -1, 2) = (5, 3)$$
$$\psi(1, 2) = (4, 3, 11),\ \psi(2, 3) = (7, 4, 18).$$

Uměli byste bez počítání zjistit, zda je složené zobrazení lineární izomorfismus?

Řešení. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$ □

Příklad. 4. Dokažte, že pokud má markovovská matice (její prvky jsou nezáporná čísla a součet prvků v každém sloupci je roven jedné) reálné vlastní číslo, je toto číslo rovno jedné. Najděte vlastní vektor k vlastnímu číslu 1 markovovské matice

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/5 \\ 1/4 & 1/3 & 3/5 \\ 1/4 & 1/3 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Vlastní vektory k vlastnímu číslu 1 jsou $p(100, 105, 75)^T$. □