12. cvičení z M1110 – determinanty, vlastní čísla, podzim 2024

Příklad. 1. Pomocí řádkových úprav spočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad. 2. Pomocí řádkových úprav spočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

Příklad. 3. Vypočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} x & x & x & \dots & x & x \\ y & x & x & \dots & x & x \\ y & y & x & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \dots & y & x \end{pmatrix}.$$

Příklad. 4. Vypočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & x+a_n \end{pmatrix}.$$

Příklad. 5. Vypočtěte determinant

$$D(a_1, a_2, \dots, a_n) = \det \begin{pmatrix} a_1+x & x & x & \dots & x & x \\ x & a_2+x & x & \dots & x & x \\ x & x & a_3+x & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x & a_n+x \end{pmatrix}.$$

Návod. Pomocí řádkových úprav a Laplaceova rozvoje lze odvodit rekurentní vztah mezi $D(a_1, a_2. \dots, a_n)$ a $D(a_2, a_3, \dots, a_n)$. □

Příklad. 6. Vypočtěte determinant

$$D_n = \det \begin{pmatrix} a+1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

Návod. Pomocí Laplaceova rozvoje lze odvodit rekurentní vztah. □

Příklad. 7. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadaného předpisem

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Vlastní čísla jsou $1, 2$ a 3. Příslušné vlastní vektory jsou $(1,1,2)^T$, $(1,0,1)^T$, $(1,2,2)^T$. □