Soustavy lineárních rovnic

$\mathbb{N}$ množina přir. čísel $\{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ množina celých čísel

$\mathbb{Q}$ množina racionálních čísel

$\mathbb{R}$ reálná čísla $\qquad \mathbb{K}$

$\mathbb{C}$ komplexní čísla

Soustava lin. rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k$$

a_{ij}, b_i jsou známé koeficienty, $\in \mathbb{K}$

$x_1, x_2, \dots x_n$ jsou neznámé, hledáme je v množině $\mathbb{K}$

Rozšířená matice soustavy je tabulka

$$\left.\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{matrix}}_{n \text{ sloupců}} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_k \end{matrix} \end{array}\right)\right\} k \text{ řádků}$$

Matice soustavy je stejná matice bez sloupce b_i

a_{ij} — je v i-tém řádku, v j-tém sloupci

b_i je v i-tém řádku

Homogenní soustava lin. rovnic je soustava, která má na pravé straně samé 0. n-tice $(0,0,\dots,0)$ je řešením hom. soustavy.

Soustavy řešíme prováděním ekvivalentních úprav.

Ekvivalentní úpravy nemění množinu řešení.

Co není ekviv. úprava:

$$x = 1 \quad \rightsquigarrow^{2} \quad x^2 = 1$$

řešení $x = 1$ $\qquad$ $x = \pm 1$

Elementární ekvivalentní úpravy:

1) Jednu rovnici vynásobíme nenulovým číslem.

$x_1 = 2$ $\qquad\qquad$ $0 \cdot x_1 = 0$

řešení $x_1 = 2$ $\qquad\qquad$ $x_1 \in \mathbb{R}$

2) Změníme pořadí dvou rovnic (prohodíme je).

3) K i-té rovnici přičteme c-násobek k-té rovnice $(k \neq i)$.

Elementární řádkové operace odpovídají elem. ekviv. úpravám:

① řádek matice vynásobíme nenulovým číslem

② výměna dvou řádků

③ k i-tému řádku přičteme c-násobek k-tého řádku $(i \neq k)$

Cílem elem. řádk. operací je získat matici soustavy, kterou umíme vyřešit.

Vedoucí koeficient řádku matice je první nenulové číslo v řádku

Ved. koeficient

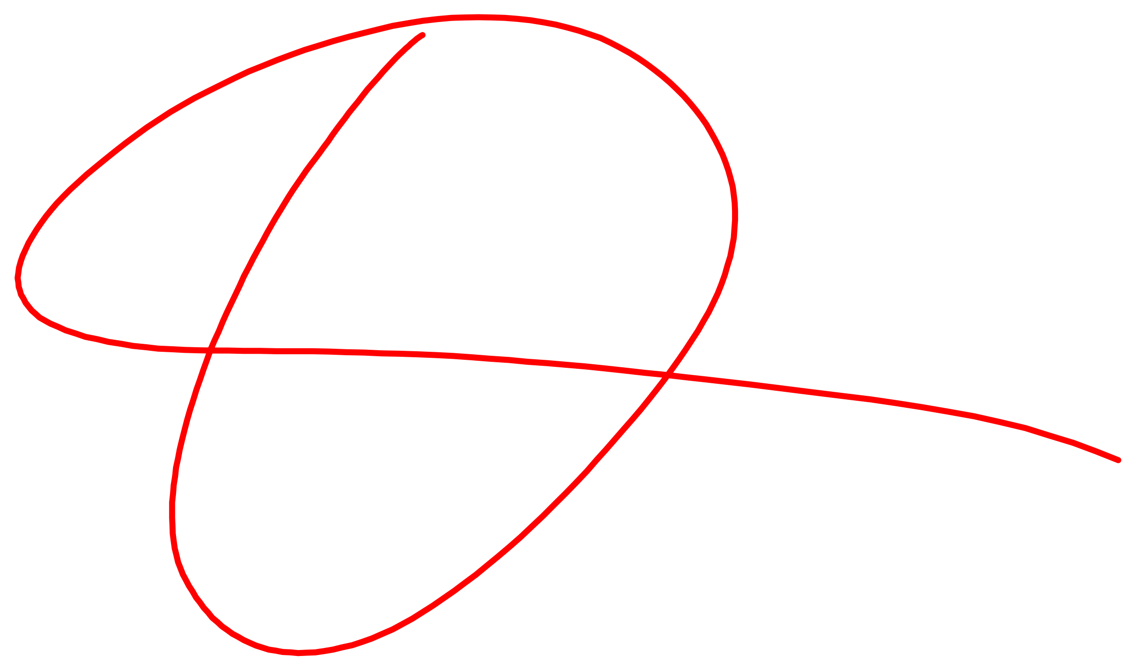
0 0 2 1 3 0 0 4

Stupňovitý (schodovitý) tvar matice (echelon form)

je matice, která splňuje 2 pravidla

(1) nulové řádky jsou na konci

(2) Je-li a_{ij} vedoucí koeficient i-tého řádku, pak



vedoucí koeficient řádku $i+1$ je $a_{i+1\,k}$, kde $k > j$.

$$
\begin{array}{lccccccc}
i\text{-tý řádek} & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{ij} & \bullet & \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\
(i+1)\text{-ní řádek} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_{i+1\,k}
\end{array}
$$

Příklad stupň. tvaru

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1
\end{array}\right)
$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 14 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

není ve stupňovitém tvaru

TVRZENÍ Soustavu s rozšířenou maticí ve stupňovitém tvaru umíme vyřešit.

(1) Jestliže je v matici řádek

$$0 \quad 0 \; \dots\dots \; 0 \;\big|\; c \neq 0$$

pak soustava nemá řešení!

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = c \neq 0$$

$$0 = c \neq 0 \quad \text{neplatí}$$

Soustava nemá řešení

$\Longleftrightarrow$ množina řešení soustavy je prázdná.

(2) Výše uvedený řádek v matici není

Řešení na příkladu

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \end{array}$$

Neznámé, které nestojí u vedoucích koeficientů volíme za parametry.

$$x_2 = p \qquad x_5 = q$$

Neznámé, které stojí u vedoucích koeficientů spočítáme postupně od poslední rovnice k 1. rovnici.

$$x_4 + 2x_5 = 1$$

$$x_4 = 1 - 2x_5 = 1 - 2q$$

$$x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$$

$$x_3 = -2x_4 - x_5 = -2(1-2q) - q = -2 + 3q$$

$$x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

$$x_1 = 1 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 1 + (-4) + 6q - 1 + 2q - q$$

$$= -4 + 7q$$

Řešením jsou všechny pětice $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-4+7q, p, -2+3q, 1-2q, q)$

$$\in \mathbb{R}^5 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

Redukovaný stupňovitý tvar

je stupňovitý tvar, kde nad každým vedoucím koeficientem jsou jenom nulové prvky:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Tvrzení Z redukovaného stupňovitého tvaru máme řešení „skoro" okamžitě.

Příklad:

$$\begin{array}{ccccc}
\multicolumn{5}{c}{\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)} \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5
\end{array}$$

$$x_2 = p, \quad x_4 = q$$

$$x_1 + 4x_2 + 8x_4 = 1$$

$$x_1 = 1 - 4x_2 - 8x_4 = 1 - 4p - 8q$$

$$2x_3 + 6x_4 = 2$$

$$2x_3 = 2 - 6x_4 = 2 - 6q$$

$$x_3 = 1 - 3q$$

$$3x_5 = 3$$

$$x_5 = \underline{1}$$

Množina řešení je

$$\left\{ [1-4p-8q,\ p,\ 1-3q,\ q,\ 1] \in \mathbb{R}^5;\ p, q \in \mathbb{R} \right\}$$

Ukážeme si, jak libovolnou matici lze pomocí elem. řádk. úprav převést nejprve do stupňovitého tvaru a pak do redukovaného stupňovitého tvaru. Tento postup se nazývá Gaussova eliminace.

Prvně na příkladu :

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 \phantom{{}+4x_3} - x_4 &= -2\\
3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0\\
x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 &= 2
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & -1 & -2\\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0\\ 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2\\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6\\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -5 & 20 & -5 & 10 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad + 2.\ \text{řádek}$$

stupňovitý tvar

$x_3 = p,\ x_4 = q$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 12 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$$5x_1 = -12x_3 + 4x_4 + 4 = -12p + 4q + 4$$

$$x_1 = -\frac{12}{5}p + \frac{4}{5}q + \frac{4}{5}$$

$$5x_2 = 8x_3 - x_4 - 6 = 8p - q - 6$$

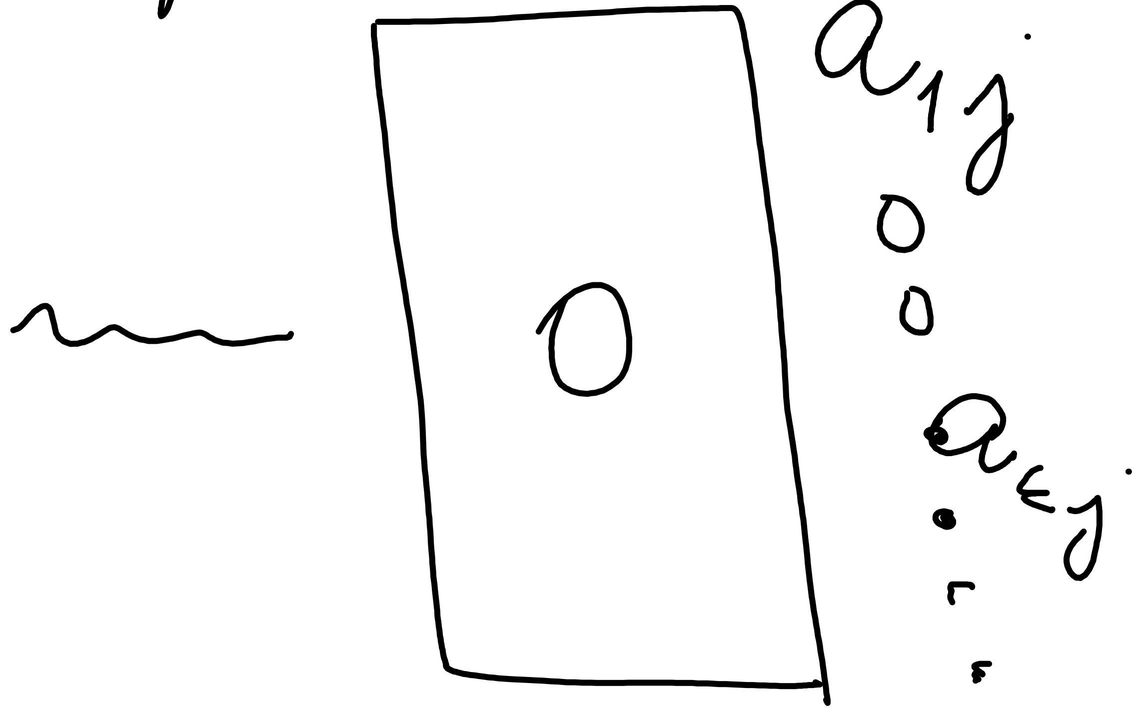
$$x_2 = \frac{8}{5}p - \frac{1}{5}q - \frac{6}{5}$$

Gaussův algoritmus teoreticky ... matice A

- je-li matice A nulová, neděláme nic
- nechť 1. sloupec s nějakým nenulovým číslem je j-tý
- nechť první nenulové číslo v tomto sloupci je a_{ij}

$$\begin{array}{cccc} & & j-1 & j \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \boxed{a_{ij}} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots \end{array}$$

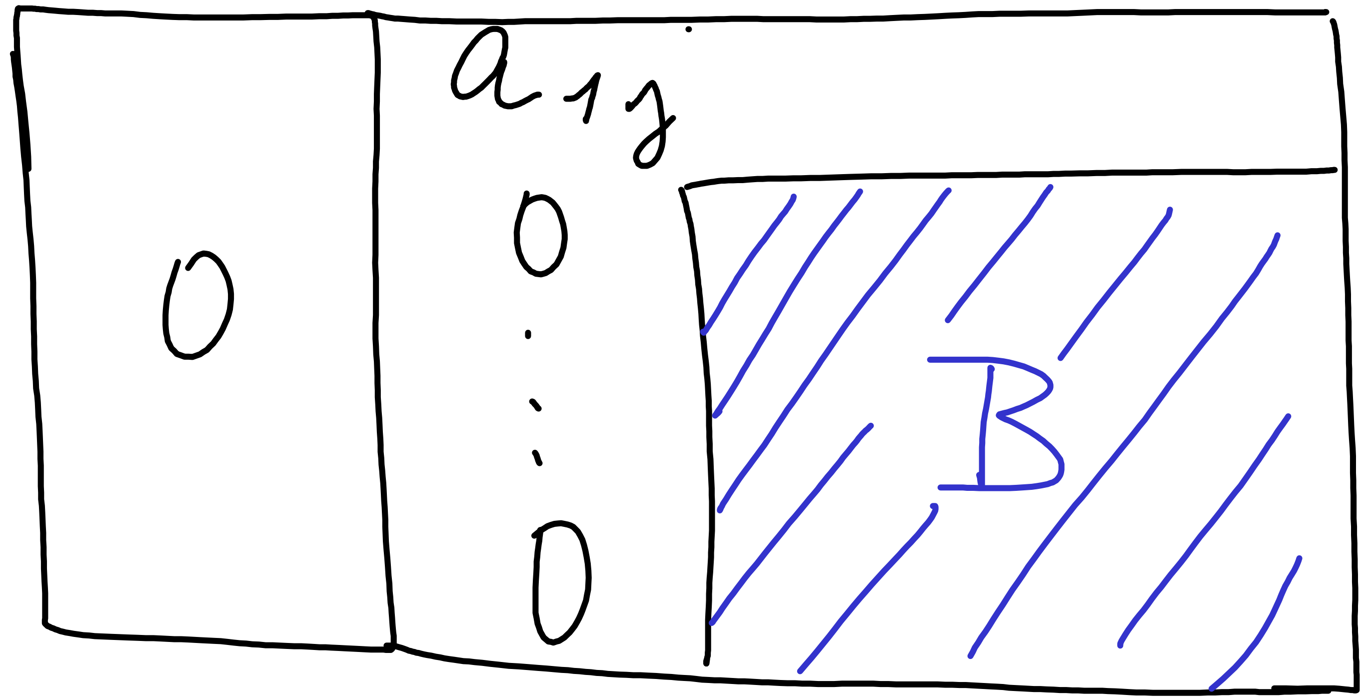
① Vyměníme 1. a i-tý řádek



② je-li $a_{kj} \neq 0$, pak od k-tého řádku odečteme $\frac{a_{kj}}{a_{1j}}$ násobek 1. řádku

Na místě $k\,j$ dostaneme

$$a_{kj} - \frac{a_{kj}}{a_{1j}}\, a_{1j} = a_{kj} - a_{kj} = 0$$



Vezmeme matici B, která má o 1 řádek méně než A a o j sloupců méně. S touto maticí provádíme totéž, co s maticí A.