7. BÁZE A DIMENZE

Jan Paseka

Ústav matematiky a statistiky
Masarykova univerzita

29. října 2024

Obsah

Abstrakt

V této kapitole sa seznámíme s pojmem ***báze*** vektorového prostoru.

Abstrakt

V této kapitole sa seznámíme s pojmem ***báze*** vektorového prostoru.

To nám umožní ve vektorových prostorech zavést ***souřadnice***.

Abstrakt

V této kapitole sa seznámíme s pojmem ***báze*** vektorového prostoru.

To nám umožní ve vektorových prostorech zavést ***souřadnice***.

Dále budeme definovat ***dimenzi*** vektorového prostoru a odvodíme si některé její základní vlastnosti.

Abstrakt

V této kapitole sa seznámíme s pojmem ***báze*** vektorového prostoru.

To nám umožní ve vektorových prostorech zavést ***souřadnice***.

Dále budeme definovat ***dimenzi*** vektorového prostoru a odvodíme si některé její základní vlastnosti.

V následující kapitole si potom mimo jiné dokážeme, že dimenze je základní strukturní invariant tzv. ***konečně rozměrných*** vektorových prostorů.

Obsah

Steinitzova věta I

Věta 1.1 (Steinitzova věta)

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$. *Jsou-li vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *lineárně nezávislé a všechny patří do lineárního obalu* $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m]$, *pak* $n \leq m$. *Zároveň při vhodném uspořádání* $\alpha' = (\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_m)$ *posloupnosti* $\alpha = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$ *platí, že posloupnost* $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}'_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}'_m)$ *generuje* $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m]$.

Steinitzova věta I

Věta 1.1 (**Steinitzova věta**)

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$. *Jsou-li vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *lineárně nezávislé a všechny patří do lineárního obalu* $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m]$, *pak* $n \leq m$. *Zároveň při vhodném uspořádání* $\alpha' = (\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_m)$ *posloupnosti* $\alpha = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$ *platí, že posloupnost* $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}'_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}'_m)$ *generuje* $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m]$.

Tvrzení 1.2

Pro libovolný vektorový prostor V *jsou nasledující podmínky ekvivalentní:*

(i) *existuje konečná množina* $X \subseteq V$ *tak, že* $[X] = V$;

Steinitzova věta I

Věta 1.1 (**Steinitzova věta**)

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$*. Jsou-li vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *lineárně nezávislé a všechny patří do lineárního obalu* $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m]$*, pak* $n \leq m$*. Zároveň při vhodném uspořádání* $\alpha' = (\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_m)$ *posloupnosti* $\alpha = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$ *platí, že posloupnost* $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}'_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}'_m)$ *generuje* $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m]$*.*

Tvrzení 1.2

Pro libovolný vektorový prostor V *jsou nasledující podmínky ekvivalentní:*

(i) *existuje konečná množina* $X \subseteq V$ *tak, že* $[X] = V$*;*

(ii) *každá lineárně nezávislá množina* $Y \subseteq V$ *je konečná.*

Steinitzova věta II

Říkáme, že vektorový prostor V je ***konečně rozměrný*** (***konečně dimenzionální***), pokud splňuje některou (tedy nutně obě) z ekvivalentních podmínek (i), (ii) právě dokázaného tvrzení.

Steinitzova věta II

Říkáme, že vektorový prostor V je ***konečně rozměrný*** (***konečně dimenzionální***), pokud splňuje některou (tedy nutně obě) z ekvivalentních podmínek (i), (ii) právě dokázaného tvrzení.

V opačném případě říkáme, že V je ***nekonečně rozměrný*** (***nekonečně dimenzionální***) vektorový prostor.

Báze a dimenze I

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor.

Báze a dimenze I

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor.

Bází prostoru V nazýváme každou lineárně nezávislou uspořádanou n-tici $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ vektorů z V, která generuje celý prostor V.

Báze a dimenze I

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor.

Bází prostoru V nazýváme každou lineárně nezávislou uspořádanou n-tici $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ vektorů z V, která generuje celý prostor V.

Říkáme pak, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ ***tvoří bázi*** prostoru V.

Báze a dimenze I

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor.

Bází prostoru V nazýváme každou lineárně nezávislou uspořádanou n-tici $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ vektorů z V, která generuje celý prostor V.

Říkáme pak, že vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ ***tvoří bázi*** prostoru V.

Tvrzení 1.3

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

(a) *libovolnou lineárně nezávislou uspořádanou k-tici $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ vektorů z V můžeme doplnit do nějaké báze $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_n)$ prostoru V;*

(b) *z libovolné generující uspořádané m-tice $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ vektorů z V můžeme vybrat nějakou bázi $(\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_n})$ prostoru V.*

Báze a dimenze II

Věta 1.4

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

(a) *V má alespoň jednu bázi;*

Báze a dimenze II

Věta 1.4

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

(a) *V má alespoň jednu bázi;*

(b) *libovolné dvě báze prostoru V mají stejný počet prvků.*

Báze a dimenze II

Věta 1.4

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

(a) *V má alespoň jednu bázi;*

(b) *libovolné dvě báze prostoru V mají stejný počet prvků.*

Právě dokázaná věta nám umožňuje korektně definovat ***dimenzi*** nebo též ***rozměr*** konečně rozměrného vektorového prostoru V jako počet prvků jeho libovolné báze.

Báze a dimenze II

Věta 1.4

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

(a) *V má alespoň jednu bázi;*

(b) *libovolné dvě báze prostoru V mají stejný počet prvků.*

Právě dokázaná věta nám umožňuje korektně definovat ***dimenzi*** nebo též ***rozměr*** konečně rozměrného vektorového prostoru V jako počet prvků jeho libovolné báze.

Dimenzi vektorového prostoru V značíme $\dim V$.

Báze a dimenze II

Věta 1.4

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

(a) *V má alespoň jednu bázi;*

(b) *libovolné dvě báze prostoru V mají stejný počet prvků.*

Právě dokázaná věta nám umožňuje korektně definovat ***dimenzi*** nebo též ***rozměr*** konečně rozměrného vektorového prostoru V jako počet prvků jeho libovolné báze.

Dimenzi vektorového prostoru V značíme $\dim V$.

Pokud $\dim V = n$, říkáme, že V je ***n-rozměrný*** vektorový prostor.

Báze a dimenze II

Věta 1.4

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

(a) *V má alespoň jednu bázi;*

(b) *libovolné dvě báze prostoru V mají stejný počet prvků.*

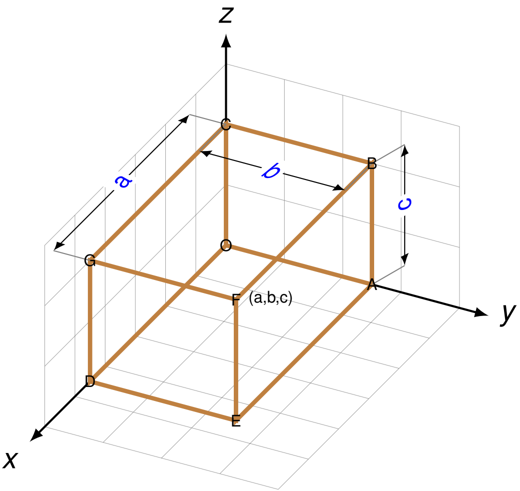
Právě dokázaná věta nám umožňuje korektně definovat ***dimenzi*** nebo též ***rozměr*** konečně rozměrného vektorového prostoru V jako počet prvků jeho libovolné báze.

Dimenzi vektorového prostoru V značíme $\dim V$.

Pokud $\dim V = n$, říkáme, že V je ***n-rozměrný*** vektorový prostor.

Pokud V je nekonečně rozměrný prostor, klademe $\dim V = \infty$.

Báze a dimenze III



Báze a dimenze IV

V případě, že bude potřebné zdůraznit úlohu (číselného) tělesa K, budeme používat podrobnější označení $\dim_K V$.

Báze a dimenze IV

V případě, že bude potřebné zdůraznit úlohu (číselného) tělesa K, budeme používat podrobnější označení $\dim_K V$.

Tedy V je konečně rozměrný právě tehdy, když $\dim V < \infty$.

Báze a dimenze IV

V případě, že bude potřebné zdůraznit úlohu (číselného) tělesa K, budeme používat podrobnější označení $\dim_K V$.

Tedy V je konečně rozměrný právě tehdy, když $\dim V < \infty$.

Tvrzení 1.5

Nechť $\dim V = n$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$. *Potom libovolné dvě z následujících podmínek implikují třetí:*

(i) *vektory* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ *jsou lineárně nezávislé;*

Báze a dimenze IV

V případě, že bude potřebné zdůraznit úlohu (číselného) tělesa K, budeme používat podrobnější označení $\dim_K V$.

Tedy V je konečně rozměrný právě tehdy, když $\dim V < \infty$.

Tvrzení 1.5

Nechť $\dim V = n$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$. *Potom libovolné dvě z následujících podmínek implikují třetí:*

(i) *vektory* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ *jsou lineárně nezávislé;*

(ii) $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m] = V$*;*

Báze a dimenze IV

V případě, že bude potřebné zdůraznit úlohu (číselného) tělesa K, budeme používat podrobnější označení $\dim_K V$.

Tedy V je konečně rozměrný právě tehdy, když $\dim V < \infty$.

Tvrzení 1.5

Nechť $\dim V = n$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$. Potom libovolné dvě z následujících podmínek implikují třetí:

(i) *vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ jsou lineárně nezávislé;*

(ii) $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m] = V$;

(iii) $m = n$.

Báze a dimenze IV

V případě, že bude potřebné zdůraznit úlohu (číselného) tělesa K, budeme používat podrobnější označení $\dim_K V$.

Tedy V je konečně rozměrný právě tehdy, když $\dim V < \infty$.

Tvrzení 1.5

Nechť $\dim V = n$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$. Potom libovolné dvě z následujících podmínek implikují třetí:

(i) *vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ jsou lineárně nezávislé;*

(ii) $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m] = V$;

(iii) $m = n$.

To kromě jiného znamená, že na ověření, zda n vektorů $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ tvoří bázi n-rozměrného vektorového prostoru V, stačí ověřit jen jednu (a to libovolnou) z podmínek (i), (ii).

Jednoznačnost vyjádření vzhledem na danou bázi I

Následující věta je speciálním případem věty z předchozí kapitoly o lineární nezávislosti.

Jednoznačnost vyjádření vzhledem na danou bázi I

Následující věta je speciálním případem věty z předchozí kapitoly o lineární nezávislosti.

Věta 1.6

Vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ tvoří bázi vektorového prostoru V právě tehdy, když každý vektor $\mathbf{x} \in V$ můžeme jednoznačně vyjádřit ve tvaru lineární kombinace $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$.

Jednoznačnost vyjádření vzhledem na danou bázi I

Následující věta je speciálním případem věty z předchozí kapitoly o lineární nezávislosti.

Věta 1.6

Vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ tvoří bázi vektorového prostoru V právě tehdy, když každý vektor $\mathbf{x} \in V$ můžeme jednoznačně vyjádřit ve tvaru lineární kombinace $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$.

Existence aspoň jednoho vyjádření $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ je ekvivalentní s podmínkou, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ generují V.

Jednoznačnost vyjádření vzhledem na danou bázi I

Následující věta je speciálním případem věty z předchozí kapitoly o lineární nezávislosti.

Věta 1.6

Vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ tvoří bázi vektorového prostoru V právě tehdy, když každý vektor $\mathbf{x} \in V$ můžeme jednoznačně vyjádřit ve tvaru lineární kombinace $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$.

Existence aspoň jednoho vyjádření $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ je ekvivalentní s podmínkou, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ generují V.

Jednoznačnost tohoto vyjádření je zase ekvivalentní s lineární nezávislostí vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$.

Jednoznačnost vyjádření vzhledem na danou bázi II

Tedy $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je bází V tehdy a jen tehdy, když pro každé $\mathbf{x} \in V$ existuje právě jedno $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in K^n$ tak, že

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \alpha \cdot \mathbf{c}.$$

Jednoznačnost vyjádření vzhledem na danou bázi II

Tedy $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je bází V tehdy a jen tehdy, když pro každé $\mathbf{x} \in V$ existuje právě jedno $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in K^n$ tak, že

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \alpha \cdot \mathbf{c}.$$

Uvědomme si, že

$$\mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{c}$$

Jednoznačnost vyjádření vzhledem na danou bázi II

Tedy $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je bází V tehdy a jen tehdy, když pro každé $\mathbf{x} \in V$ existuje právě jedno $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in K^n$ tak, že

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \alpha \cdot \mathbf{c}.$$

Uvědomme si, že

$$\mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Tento jednoznačně určený sloupcový vektor $\mathbf{c} \in K^n$ budeme nazývat ***souřadnice vektoru* $\mathbf{x}$ *vzhledem na bázi* α**

Jednoznačnost vyjádření vzhledem na danou bázi II

Tedy $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je bází V tehdy a jen tehdy, když pro každé $\mathbf{x} \in V$ existuje právě jedno $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in K^n$ tak, že

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \alpha \cdot \mathbf{c}.$$

Uvědomme si, že

$$\mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Tento jednoznačně určený sloupcový vektor $\mathbf{c} \in K^n$ budeme nazývat ***souřadnice vektoru*** $\mathbf{x}$ ***vzhledem na bázi*** α a označovat

$$\boxed{\mathbf{c} = (\mathbf{x})_\alpha.}$$

Souřadnicové zobrazení I

Tedy každá báze α v n-rozměrném vektorovém prostoru V definuje ***souřadnicové zobrazení*** $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\alpha$ z V do sloupcového vektorového prostoru K^n.

Souřadnicové zobrazení I

Tedy každá báze α v n-rozměrném vektorovém prostoru V definuje ***souřadnicové zobrazení*** $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\alpha$ z V do sloupcového vektorového prostoru K^n.

Tvrzení 1.7

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ *je báze konečně rozměrného vektorového prostoru* V.

Souřadnicové zobrazení I

Tedy každá báze α v n-rozměrném vektorovém prostoru V definuje ***souřadnicové zobrazení*** $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\alpha$ z V do sloupcového vektorového prostoru K^n.

Tvrzení 1.7

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je báze konečně rozměrného vektorového prostoru V.

Potom příslušné souřadnicové zobrazení $(-)_\alpha : V \to K^n$ je bijektivní a zachovává lineární kombinace,

Souřadnicové zobrazení I

Tedy každá báze α v n-rozměrném vektorovém prostoru V definuje ***souřadnicové zobrazení*** $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\alpha$ z V do sloupcového vektorového prostoru K^n.

Tvrzení 1.7

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je báze konečně rozměrného vektorového prostoru V.

Potom příslušné souřadnicové zobrazení $(-)_\alpha : V \to K^n$ je bijektivní a zachovává lineární kombinace,

tj. pro libovolná $a, b \in K$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí

$$(a\mathbf{x} + b\mathbf{y})_\alpha = a(\mathbf{x})_\alpha + b(\mathbf{y})_\alpha .$$

Souřadnicové zobrazení I

Tedy každá báze α v n-rozměrném vektorovém prostoru V definuje ***souřadnicové zobrazení*** $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\alpha$ z V do sloupcového vektorového prostoru K^n.

Tvrzení 1.7

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ *je báze konečně rozměrného vektorového prostoru* V.

Potom příslušné souřadnicové zobrazení $(-)_\alpha : V \to K^n$ *je bijektivní a zachovává lineární kombinace,*

tj. pro libovolná $a, b \in K$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ *platí*

$$(a\mathbf{x} + b\mathbf{y})_\alpha = a(\mathbf{x})_\alpha + b(\mathbf{y})_\alpha.$$

K němu inverzní zobrazení $(-)_\alpha^{-1} : K^n \to V$ *je dané předpisem* $\mathbf{c} \mapsto \alpha \cdot \mathbf{c}$.

Souřadnicové zobrazení II

Zejména tedy pro libovolné $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{c} \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}}, \qquad (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c})_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{c}.$$

Souřadnicové zobrazení II

Zejména tedy pro libovolné $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{c} \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = \alpha \cdot (\mathbf{x})_\alpha, \qquad (\alpha \cdot \mathbf{c})_\alpha = \mathbf{c}.$$

První rovnost ukazuje, jak je možno vektor $\mathbf{x}$ zrekonstruovat z dané báze α a jeho souřadnic $(\mathbf{x})_\alpha$ v této bázi;

Souřadnicové zobrazení II

Zejména tedy pro libovolné $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{c} \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = \alpha \cdot (\mathbf{x})_\alpha, \qquad (\alpha \cdot \mathbf{c})_\alpha = \mathbf{c}.$$

První rovnost ukazuje, jak je možno vektor $\mathbf{x}$ zrekonstruovat z dané báze α a jeho souřadnic $(\mathbf{x})_\alpha$ v této bázi;

druhá, že souřadnice lineární kombinace $\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i = \alpha \cdot \mathbf{c}$ v bázi $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ tvoří právě vektor $(c_1, \ldots, c_n)^T$.

Souřadnicové zobrazení II

Zejména tedy pro libovolné $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{c} \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = \alpha \cdot (\mathbf{x})_\alpha, \qquad (\alpha \cdot \mathbf{c})_\alpha = \mathbf{c}.$$

První rovnost ukazuje, jak je možno vektor $\mathbf{x}$ zrekonstruovat z dané báze α a jeho souřadnic $(\mathbf{x})_\alpha$ v této bázi;

druhá, že souřadnice lineární kombinace $\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i = \alpha \cdot \mathbf{c}$ v bázi $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ tvoří právě vektor $(c_1, \ldots, c_n)^T$.

Takto zavedené souřadnice můžeme nazvat ***sloupcovými souřadnicemi*** vzhledem k dané bázi.

Souřadnicové zobrazení II

Zejména tedy pro libovolné $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{c} \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = \alpha \cdot (\mathbf{x})_\alpha, \qquad (\alpha \cdot \mathbf{c})_\alpha = \mathbf{c}.$$

První rovnost ukazuje, jak je možno vektor $\mathbf{x}$ zrekonstruovat z dané báze α a jeho souřadnic $(\mathbf{x})_\alpha$ v této bázi;

druhá, že souřadnice lineární kombinace $\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{u}_i = \alpha \cdot \mathbf{c}$ v bázi $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ tvoří právě vektor $(c_1, \dots, c_n)^T$.

Takto zavedené souřadnice můžeme nazvat ***sloupcovými souřadnicemi*** vzhledem k dané bázi.

Podobným způsobem můžeme zavést i ***řádkové souřadnice*** a dokázat pro ně analogická tvrzení jako pro sloupcové.

Kanonická báze I

Příklad 1.8

Označme $\mathbf{e}_i^{(n)} = \mathbf{s}_i(\mathbf{I}_n) \in K^n$ *sloupcový vektor skládající ze samých nul, mimo* i*-té složky, která je 1.*

Kanonická báze I

Příklad 1.8

Označme $\mathbf{e}_i^{(n)} = \mathbf{s}_i(\mathbf{I}_n) \in K^n$ *sloupcový vektor skládající ze samých nul, mimo* i*-té složky, která je 1.*

Potom $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1^{(n)}, \ldots, \mathbf{e}_n^{(n)})$ *je báze sloupcového vektorového prostoru* K^n*.*

Kanonická báze I

Příklad 1.8

Označme $\mathbf{e}_i^{(n)} = \mathbf{s}_i(\mathbf{I}_n) \in K^n$ *sloupcový vektor skládající ze samých nul, mimo i-té složky, která je 1.*

Potom $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{e}_n^{(n)})$ *je báze sloupcového vektorového prostoru* K^n*.*

Nazýváme ji **kanonickou bází** *tohoto prostoru. Můžeme ji ztotožnit s jednotkovou maticí* $\mathbf{I}_n$*.*

Kanonická báze I

Příklad 1.8

Označme $\mathbf{e}_i^{(n)} = \mathbf{s}_i(\mathbf{I}_n) \in K^n$ *sloupcový vektor skládající ze samých nul, mimo i-té složky, která je 1.*

Potom $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{e}_n^{(n)})$ *je báze sloupcového vektorového prostoru* K^n*.*

Nazýváme ji **kanonickou bází** *tohoto prostoru. Můžeme ji ztotožnit s jednotkovou maticí* $\mathbf{I}_n$*.*

Občas budeme horní index (n) vynechávat a příslušnou bázi označovat stručně $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

Kanonická báze II

Pro libovolný vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n,$$

proto $(\mathbf{x})_\varepsilon = \mathbf{x}$,

Kanonická báze II

Pro libovolný vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n,$$

proto $(\mathbf{x})_\varepsilon = \mathbf{x}$,

tj. každý vektor $\mathbf{x} \in K^n$ splýva se svými vlastními souřadnicemi v kanonické bázi.

Kanonická báze II

Pro libovolný vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n,$$

proto $(\mathbf{x})_\varepsilon = \mathbf{x}$,

tj. každý vektor $\mathbf{x} \in K^n$ splýva se svými vlastními souřadnicemi v kanonické bázi.

Kanonická báze řádkového vektorového prostoru K^n je tvořená řádky jednotkové matice $\mathbf{I}_n$ a značíme ji stejně jako v předcházejícím případě $\varepsilon^{(n)} = \left(\mathbf{e}_1^{(n)}, \ldots, \mathbf{e}_n^{(n)}\right)^T$ nebo stručně $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)^T$, s tím rozdílem, že $\varepsilon^{(n)} = \varepsilon$ je sloupec vektorů a každé $\mathbf{e}_i$ je řádek skládající se ze samých nul, mimo i-té pozice, na které je 1.

Kanonická báze III

Věta 1.9

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ *platí* $\dim K^n = n$.

Kanonická báze III

Věta 1.9

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $\dim K^n = n$.

Příklad 1.10

Sloupce matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tvoří bázi α sloupcového vektorového prostoru K^4.

Kanonická báze IV

Souřadnice vektoru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in K^n$ v bázi α jsou dané vztahem

$$(x)_\alpha = (x_4, x_3 - x_4, x_2 - x_3, x_1 - x_2)^T.$$

Kanonická báze IV

Souřadnice vektoru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in K^n$ v bázi α jsou dané vztahem

$$(x)_\alpha = (x_4, x_3 - x_4, x_2 - x_3, x_1 - x_2)^T.$$

Platí totiž

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x_3 - x_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_2 - x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kanonická báze V

Příklad 1.11

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. *Pro libovolné* $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$ *označme* $\mathbf{E}_{kl}^{(m,n)} = \mathbf{E}_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{m \times n}$ *matici typu* $m \times n$ *nad tělesem* K, *která sestává ze samých nul, kromě pozice* (k, l), *na které je 1.*

Kanonická báze V

Příklad 1.11

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. *Pro libovolné* $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$ *označme* $\mathbf{E}_{kl}^{(m,n)} = \mathbf{E}_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{m\times n}$ *matici typu* $m \times n$ *nad tělesem* K, *která sestává ze samých nul, kromě pozice* (k, l), *na které je 1.*

Zřejmě každou matici $\mathbf{A} = (a_{kl}) \in K^{m\times n}$ *lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru*

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\mathbf{E}_{kl}.$$

Kanonická báze V

Příklad 1.11

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$*. Pro libovolné* $1 \leq k \leq m$*,* $1 \leq l \leq n$ *označme* $\mathbf{E}_{kl}^{(m,n)} = \mathbf{E}_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{m\times n}$ *matici typu* $m \times n$ *nad tělesem* K*, která sestává ze samých nul, kromě pozice* (k, l)*, na které je 1.*

Zřejmě každou matici $\mathbf{A} = (a_{kl}) \in K^{m\times n}$ *lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru*

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\mathbf{E}_{kl}.$$

Z toho vyplývá, že matice $\mathbf{E}_{kl}^{(m,n)}$*,* $1 \leq k \leq m$*,* $1 \leq l \leq n$*, tvoří bázi vektorového prostoru* $K^{m\times n}$ *všech matic typu* $m \times n$ *nad tělesem* K*.*

Kanonická báze V

Příklad 1.11

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Pro libovolné $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$ označme $\mathbf{E}_{kl}^{(m,n)} = \mathbf{E}_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{m \times n}$ matici typu $m \times n$ nad tělesem K, která sestává ze samých nul, kromě pozice (k, l), na které je 1.

Zřejmě každou matici $\mathbf{A} = (a_{kl}) \in K^{m \times n}$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \mathbf{E}_{kl}.$$

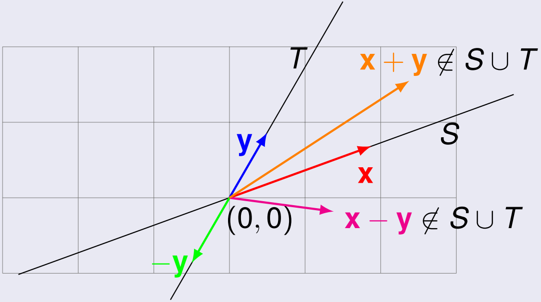
Z toho vyplývá, že matice $\mathbf{E}_{kl}^{(m,n)}$, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$, tvoří bázi vektorového prostoru $K^{m \times n}$ všech matic typu $m \times n$ nad tělesem K.

Speciálním případem je kanonická báze $\varepsilon^{(n)}$ v prostoru K^n.

Dostáváme tak vztah: $\dim K^{m \times n} = mn$.

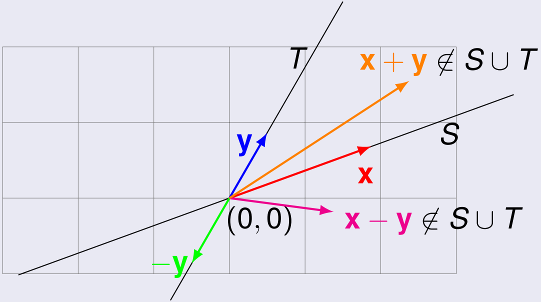
Souřadnice vektoru XV

Příklad 1.12



Souřadnice vektoru XV

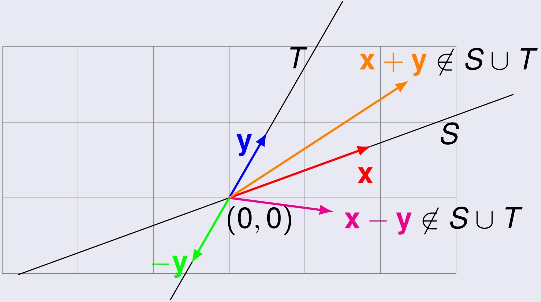
Příklad 1.12



Souřadnice vektoru $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ *v bázi* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *je vektor* $(1,1)$.

Souřadnice vektoru XV

Příklad 1.12



Souřadnice vektoru $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ *v bázi* $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *je vektor* $(1,1)$.

Souřadnice vektoru $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ *v bázi* $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *je vektor* $(1,-1)$.

Dimenze součtu a součinu I

Věta 1.13

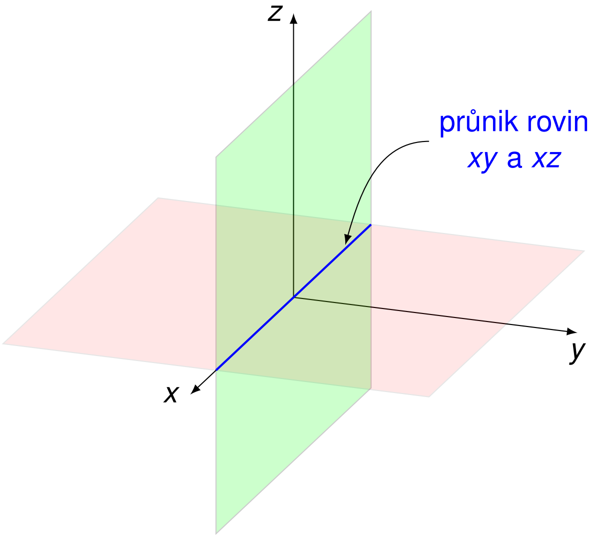
Nechť $S, T \subseteq V$ jsou konečně rozměrné lineární podprostory vektorového prostoru V.

Dimenze součtu a součinu I

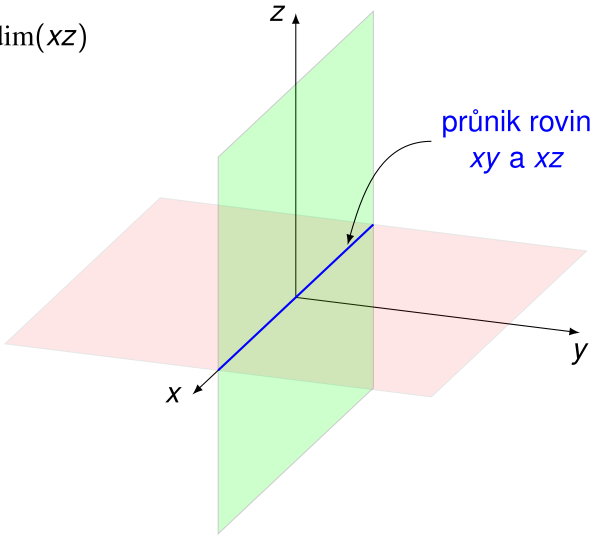
Věta 1.13

Nechť $S, T \subseteq V$ jsou konečně rozměrné lineární podprostory vektorového prostoru V.
Potom

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T).$$

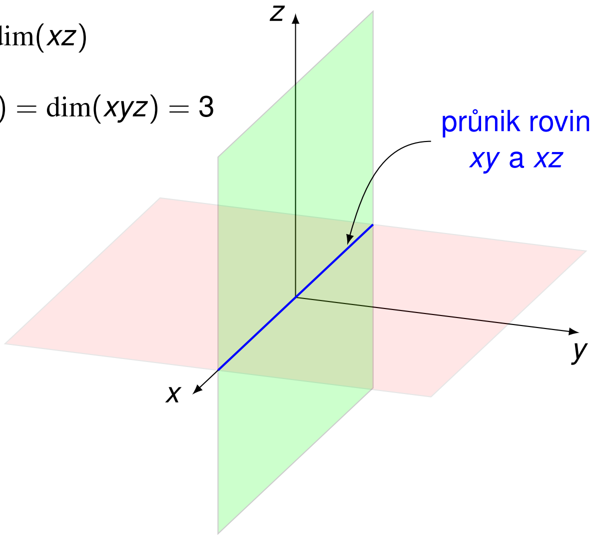

z
průnik rovin
xy a xz
y
x

$$\dim(xy) = 2 = \dim(xz)$$



$$\dim(xy) = 2 = \dim(xz)$$

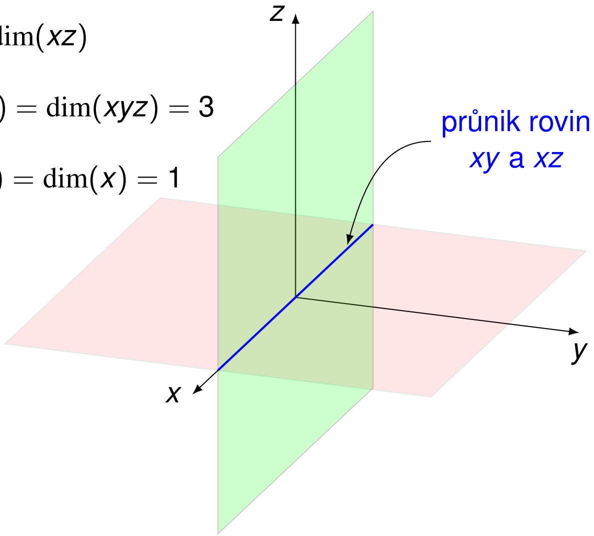
$$\dim((xy) + (xz)) = \dim(xyz) = 3$$



$$\dim(xy) = 2 = \dim(xz)$$

$$\dim((xy) + (xz)) = \dim(xyz) = 3$$

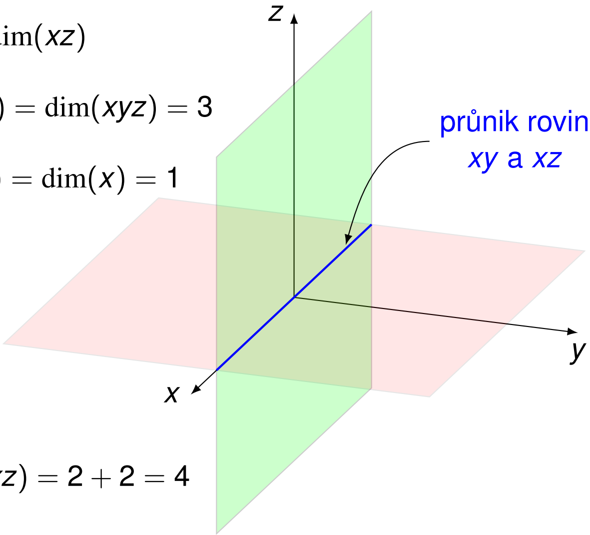
$$\dim((xy) \cap (xz)) = \dim(x) = 1$$



$$\dim(xy) = 2 = \dim(xz)$$

$$\dim((xy) + (xz)) = \dim(xyz) = 3$$

$$\dim((xy) \cap (xz)) = \dim(x) = 1$$

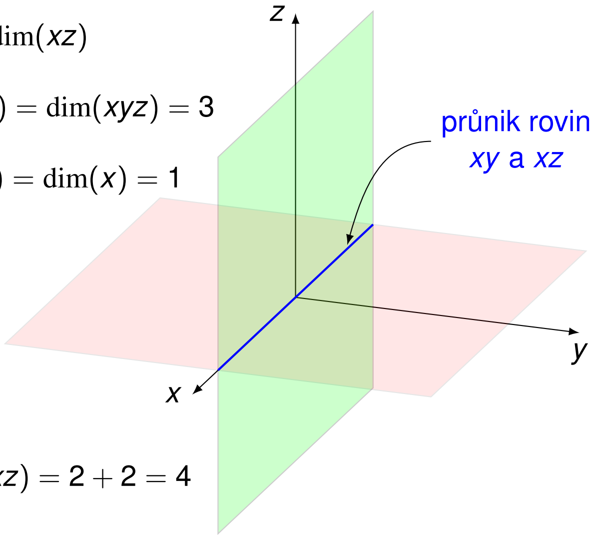


$$\dim(xy) + \dim(xz) = 2 + 2 = 4$$

$$\dim(xy) = 2 = \dim(xz)$$

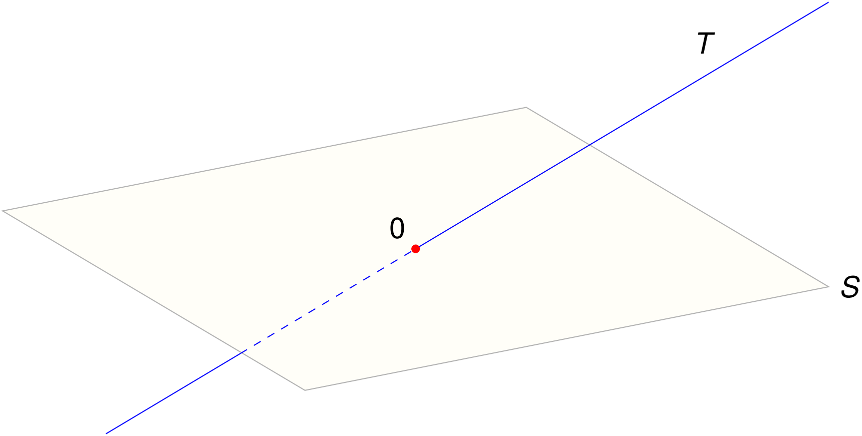
$$\dim((xy) + (xz)) = \dim(xyz) = 3$$

$$\dim((xy) \cap (xz)) = \dim(x) = 1$$



$$\dim(xy) + \dim(xz) = 2 + 2 = 4$$

$$\dim((xy) + (xz)) + \dim((xy) \cap (xz)) = 3 + 1 = 4$$


T
0
S

Dimenze součtu a součinu II

Důsledek 1.14

Nechť S, T jsou konečně rozměrné lineární podprostory vektorového prostoru V.

Dimenze součtu a součinu II

Důsledek 1.14

Nechť S, T jsou konečně rozměrné lineární podprostory vektorového prostoru V.
Potom $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, tj. součet $S + T$ je direktní právě tehdy, když

$$\dim(S+T) = \dim S + \dim T.$$

Dimenze součtu a součinu II

Důsledek 1.14

Nechť S, T jsou konečně rozměrné lineární podprostory vektorového prostoru V.
Potom $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, tj. součet $S + T$ je direktní právě tehdy, když

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T.$$

Tvrzení 1.15

Nechť V, W jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad K.

Dimenze součtu a součinu II

Důsledek 1.14

Nechť S, T jsou konečně rozměrné lineární podprostory vektorového prostoru V.
Potom $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, tj. součet $S + T$ je direktní právě tehdy, když

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T.$$

Tvrzení 1.15

Nechť V, W jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad K.

Potom pro dimenzi jejich kartézského součinu platí

$$\dim(V \times W) = \dim V + \dim W.$$

Obsah

Hodnost matice I

V této části je potřebné rozlišovat mezi vektorovými prostory řádkových resp. sloupcových vektorů. Prostor řádkových vektorů budeme značit $K^{1\times n}$ a prostor sloupcových vektorů $K^{n\times 1}$.

Hodnost matice II

$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \in K^{1\times n}$ označuje i-tý řádek a $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) \in K^{m\times 1}$ j-tý sloupec matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$.

Hodnost matice II

$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \in K^{1\times n}$ označuje i-tý řádek a $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) \in K^{m\times 1}$ j-tý sloupec matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$.

Tuto matici můžeme zapsat blokově jako

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \mathbf{r}_2(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = (\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})).$$

Hodnost matice III

Řádkovou hodností $h_r(\mathbf{A})$ matice **A** nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{1\times n}$ generovaného řádky matice **A**.

Hodnost matice III

Řádkovou hodností $h_r(\mathbf{A})$ matice **A** nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{1\times n}$ generovaného řádky matice **A**.

Podobně, ***sloupcovou hodností*** $h_s(\mathbf{A})$ matice **A** nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{m\times 1}$ generovaného sloupci matice **A**.

Hodnost matice III

Řádkovou hodností $h_r(\mathbf{A})$ matice **A** nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{1\times n}$ generovaného řádky matice **A**.

Podobně, ***sloupcovou hodností*** $h_s(\mathbf{A})$ matice **A** nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{m\times 1}$ generovaného sloupci matice **A**.

Tedy

$$\begin{aligned} h_r(\mathbf{A}) &= \dim[\mathbf{r}_1(\mathbf{A}), \mathbf{r}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{r}_m(\mathbf{A})], \\ h_s(\mathbf{A}) &= \dim[\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})]. \end{aligned}$$

Hodnost matice IV

Označme $\varphi : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$ lineární zobrazení dané předpisem $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in K^{n\times 1}$.

Hodnost matice IV

Označme $\varphi : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$ lineární zobrazení dané předpisem $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in K^{n\times 1}$.

Hodností lineárního zobrazení φ nazýváme dimenzi jeho obrazu, t. j. $h(\varphi) = \dim Im\varphi$.

Hodnost matice IV

Označme $\varphi : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$ lineární zobrazení dané předpisem $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in K^{n\times 1}$.

Hodností lineárního zobrazení φ nazýváme dimenzi jeho obrazu, t. j. $h(\varphi) = \dim Im\varphi$.

Zřejmě platí $h(\varphi) = h_s(\mathbf{A})$, protože lineární podprostor $\mathrm{Im}\varphi \subseteq K^{m\times 1}$ je generovaný sloupci matice **A**.

Hodnost matice V

Lemma 2.1

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

Hodnost matice V

Lemma 2.1

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

(a) *Nechť matice* $\mathbf{B}$ *vznikne z matice* $\mathbf{A}$ *provedením jedné elementární řádkové operace (ERO). Pak* $[\mathbf{r}_1(\mathbf{A}), \mathbf{r}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{r}_m(\mathbf{A})] = [\mathbf{r}_1(\mathbf{B}), \mathbf{r}_2(\mathbf{B}), \ldots, \mathbf{r}_m(\mathbf{B})]$.

Hodnost matice V

Lemma 2.1

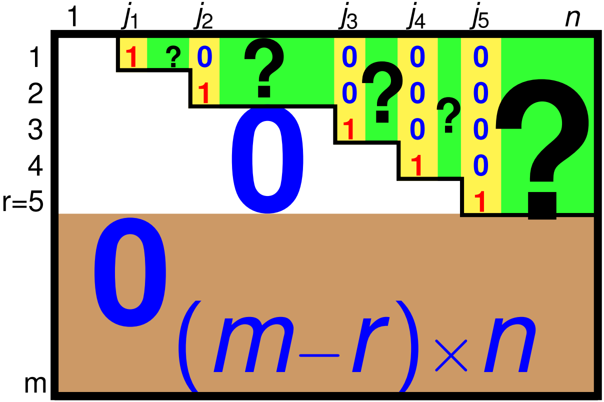
Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

(a) Nechť matice **B** *vznikne z matice* **A** *provedením jedné elementární řádkové operace (ERO). Pak* $[\mathbf{r}_1(\mathbf{A}), \mathbf{r}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{r}_m(\mathbf{A})] = [\mathbf{r}_1(\mathbf{B}), \mathbf{r}_2(\mathbf{B}), \ldots, \mathbf{r}_m(\mathbf{B})]$.

(b) Nechť matice **C** *vznikne z matice* **A** *vykonáním jedné elementární sloupcové operace (ESO). Pak* $[\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})] = [\mathbf{s}_1(\mathbf{C}), \mathbf{s}_2(\mathbf{C}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{C})]$.

Hodnost matice VI

$h_s(\mathbf{A}) = 5 = h_r(\mathbf{A})$



Redukovaný stupňovitý tvar

Hodnost matice VII

Tvrzení 2.2

Pro každou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ *platí* $h_r(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A})$.

Hodnost matice VII

Tvrzení 2.2

Pro každou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ *platí* $h_r(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A})$.

Společnou hodnotu řádkové a sloupcové hodnosti budeme nyní značit $h(\mathbf{A})$ a nazývat ***hodností matice*** $\mathbf{A}$.

Hodnost matice VII

Tvrzení 2.2

Pro každou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ *platí* $h_r(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A})$.

Společnou hodnotu řádkové a sloupcové hodnosti budeme nyní značit $h(\mathbf{A})$ a nazývat ***hodností matice*** **A**.

Zřejmě pro $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je $h(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$.

Hodnost matice VII

Tvrzení 2.2

Pro každou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ platí $h_r(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A})$.

Společnou hodnotu řádkové a sloupcové hodnosti budeme nyní značit $h(\mathbf{A})$ a nazývat ***hodností matice* A**.

Zřejmě pro $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je $h(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$.

Tvrzení 2.3

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$. Potom $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T)$.

Hodnost matice VIII

Tvrzení 2.4

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in K^{m\times 1}$ jsou libovolné vektory a $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ je matice taková, že $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_j$ pro $1 \leq j \leq n$.

Hodnost matice VIII

Tvrzení 2.4

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in K^{m\times 1}$ *jsou libovolné vektory a* $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ *je matice taková, že* $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_j$ *pro* $1 \leq j \leq n$.

Potom

(a) $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když* $h(\mathbf{A}) = n$;

Hodnost matice VIII

Tvrzení 2.4

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in K^{m\times 1}$ *jsou libovolné vektory a* $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ *je matice taková, že* $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_j$ *pro* $1 \leq j \leq n$.

Potom

(a) $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když* $h(\mathbf{A}) = n$;

(b) $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] = K^{m\times 1}$ *právě tehdy, když* $h(\mathbf{A}) = m$.

Hodnost matice VIII

Tvrzení 2.4

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in K^{m\times 1}$ *jsou libovolné vektory a* $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ *je matice taková, že* $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_j$ *pro* $1 \leq j \leq n$.

Potom

(a) $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když* $h(\mathbf{A}) = n$;

(b) $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] = K^{m\times 1}$ *právě tehdy, když* $h(\mathbf{A}) = m$.

Případ (a) může nastat tehdy, když $n \leq m$; naopak, (b) může nastat jedině za předpokladu $m \leq n$.

Hodnost matice IX

Tvrzení 2.5

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$. *Potom*

Hodnost matice IX

Tvrzení 2.5

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n\times p}$. *Potom*

$$h(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \leq \min\big(h(\mathbf{A}), h(\mathbf{B})\big).$$

Hodnost matice IX

Tvrzení 2.5

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n\times p}$. *Potom*

$$h(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \leq \min\big(h(\mathbf{A}), h(\mathbf{B})\big).$$

Shrnutí 2.6

Pro libovolnou matici $\mathbf{A}$ *typu* $m \times n$ *platí* $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T) \leq m, n$. *Hodnost se nemění elementárními řádkovými ani sloupcovými úpravami. Hodnost matice v redukovaném stupňovitém tvaru je rovna počtu nenulových řádků.*

Hodnost matice X - Aplikace

Kluby města Lišákova– sbírka Šestnáct miniatur Jiřího Matouška

Ve městě žije n občanů, kteří jsou sdruženi v m klubech. Podle vyhlášky městské rady má každý klub lichý počet členů, zatímco pro každé dva kluby musí být počet společných členů sudý.

Věta 2.7

V této situaci je nutně $m \leq n$, tj. klubů není víc než občanů.

Hodnost matice X - Aplikace

Kluby města Lišákova– sbírka Šestnáct miniatur Jiřího Matouška

Ve městě žije n občanů, kteří jsou sdruženi v m klubech. Podle vyhlášky městské rady má každý klub lichý počet členů, zatímco pro každé dva kluby musí být počet společných členů sudý.

Věta 2.7

V této situaci je nutně $m \leq n$, tj. klubů není víc než občanů.

Občany označme $1, 2, \ldots, n$ a kluby $K_1, K_2, \ldots, K_m$. Definujeme matici **A** typu $m \times n$, kde $a_{ij} = 1$ pokud $j \in K_i$ a $a_{ij} = 0$ jinak (kluby = řádky).

Hodnost matice X - Aplikace

Kluby města Lišákova– sbírka Šestnáct miniatur Jiřího Matouška

Ve městě žije n občanů, kteří jsou sdruženi v m klubech. Podle vyhlášky městské rady má každý klub lichý počet členů, zatímco pro každé dva kluby musí být počet společných členů sudý.

Věta 2.7

V této situaci je nutně $m \leq n$, tj. klubů není víc než občanů.

Občany označme $1, 2, \ldots, n$ a kluby $K_1, K_2, \ldots, K_m$. Definujeme matici **A** typu $m \times n$, kde $a_{ij} = 1$ pokud $j \in K_i$ a $a_{ij} = 0$ jinak (kluby = řádky). Uvažujeme **A** nad dvouprvkovým tělesem $\mathbb{Z}_2$. Hodnost **A** je nejvýše n.

Hodnost matice X - Aplikace

Kluby města Lišákova– sbírka Šestnáct miniatur Jiřího Matouška

Ve městě žije n občanů, kteří jsou sdruženi v m klubech. Podle vyhlášky městské rady má každý klub lichý počet členů, zatímco pro každé dva kluby musí být počet společných členů sudý.

Věta 2.7

V této situaci je nutně $m \leq n$, tj. klubů není víc než občanů.

Občany označme $1, 2, \ldots, n$ a kluby $K_1, K_2, \ldots, K_m$. Definujeme matici $\mathbf{A}$ typu $m \times n$, kde $a_{ij} = 1$ pokud $j \in K_i$ a $a_{ij} = 0$ jinak (kluby = řádky). Uvažujeme $\mathbf{A}$ nad dvouprvkovým tělesem $\mathbb{Z}_2$. Hodnost $\mathbf{A}$ je nejvýše n. Podle vyhlášky městské rady platí $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_m$, a protože hodnost součinu matic je nejvýše rovna minimu z hodností činitelů, je $m = h(\mathbf{I}_m) \leq h(\mathbf{A}) \leq n$.