6. LINEÁRNÍ PODPROSTORY a LINEÁRNÍ NEZÁVISLOST

Jan Paseka

Ústav matematiky a statistiky
Masarykova univerzita

29. října 2024

Obsah

Abstrakt

V této kapitole budeme pokračovat ve studiu abstraktních vektorových prostorů nad obecným tělesem.

K tedy bude v celé kapitole označovat nějaké pevné, jinak libovolné těleso a V bude pevně zvolený vektorový prostor nad K.

Obsah

Lineární podprostory I

Definice 1

Množina $S \subseteq V$ se nazývá **lineární (vektorový) podprostor** *vektorového prostoru V, pokud $S \neq \emptyset$ a pro všechny skaláry $a \in K$ a vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ platí $a\mathbf{x} \in S$ a $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$.*

Jinak řečeno, neprázdná podmnožina $S \subseteq V$ je lineární podprostor právě tehdy, když je uzavřená na operace skalárního násobku a součtu vektorů.

Tvrzení 1.1

Nechť S je lineární podprostor vektorového prostoru V. Pak $\mathbf{0} \in S$ a S s operacemi součtu vektorů a skalárního násobku zúženými z V na S **tvoří vektorový prostor** *nad (číselným) tělesem K.*

Lineární podprostory II

V každém vektorovém prostoru V jsou $\{\mathbf{0}\}$ a V lineární podprostory (v případě, když $V = \{\mathbf{0}\}$, dokonce splývají, v opačném případě jde o dva různé podprostory) – $\{\mathbf{0}\}$ nazývame ***triviální*** nebo též ***nulový*** a V ***nevlastní*** alebo též ***plný*** lineární podprostor.

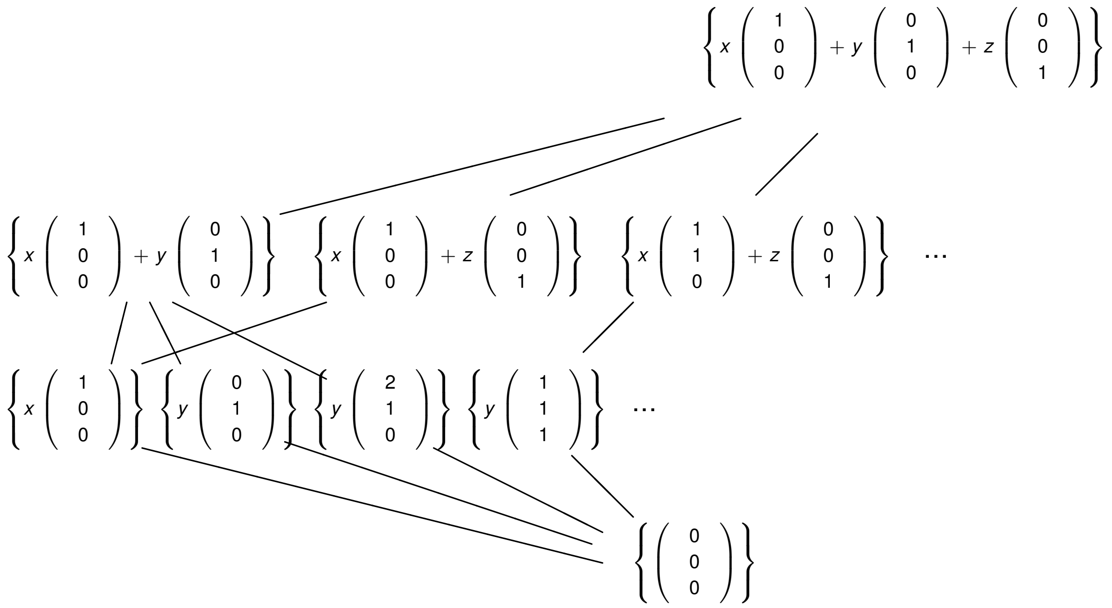
Tedy pro ***vlastní netriviální*** lineární podprostor $S \subseteq V$ platí $\{\mathbf{0}\} \neq S \neq V$.

Např. ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ netriviální vlastní podprostory jsou právě všechny přímky a roviny procházející počátkem $\mathbf{0}$.

To si můžeme graficky vyjádřit pomocí následujícího obrázku, který samozřejmě ukáže pouze několik z nekonečně mnoha lineárních podprostorů.

Lineární podprostory III

Lineární podprostory jsou popsány pomocí minimálního počtu generátorů.



Abstrakt | Lineární obal | Nezávislost | Podprostory | Příklady
Lineární podprostory | Průnik a součet

Lineární podprostory IV

Následující tvrzení charakterizuje lineární podprostory jako množiny uzavřené na lineární kombinace.

Tvrzení 1.2

Pro libovolnou podmnožinu S vektorového prostoru V jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) *S je lineární podprostor ve V;*

(ii) *$S \neq \emptyset$ a pro všechny skaláry $a, b \in K$ a vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ platí $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \in S$;*

(iii) *pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro všechny skaláry $a_1, \ldots, a_n \in K$ a vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in S$ platí*

$$a_1\mathbf{x}_1 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n \in S.$$

Příklady I

Příklad 1.3

(a) Označme $K^{(X)}$ množinu všech funkcí $f : X \to K$ takových, že množina $\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}$ je konečná.

Pro libovolnou lineární kombinaci funkcí $f, g \in K^{(X)}$ platí

$$\{x \in X;\ af(x) + bg(x) \neq 0\} \subseteq \{x \in X;\ f(x) \neq 0\} \cup \{x \in X;\ g(x) \neq 0\}.$$

Protože je pravá strana inkluze konečná, je i levá strana konečná. Z toho vyplývá, že $K^{(X)}$ je lineární podprostor vektorového prostoru K^X.

Je-li X je konečná, tak $K^{(X)} = K^X$, je-li X je nekonečná, tak $K^{(X)}$ je netriviální vlastní podprostor v K^X.

Příklady II

Příklad 1.3

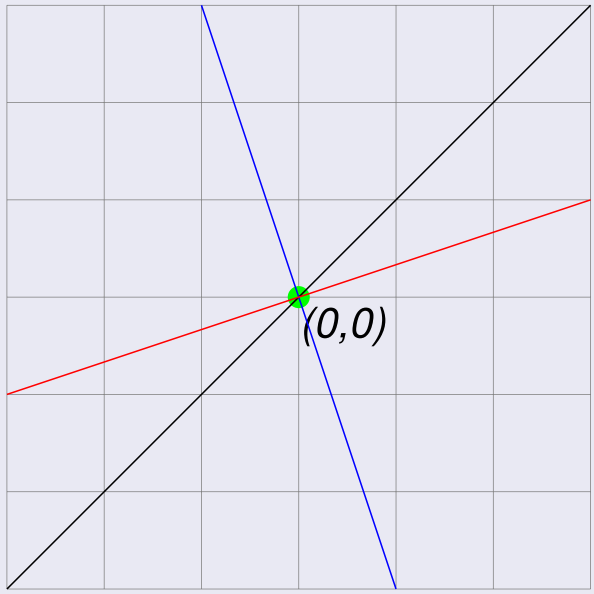
(b) Nechť $X \subseteq \mathbb{R}$ je libovolná množina reálných čísel. Potom $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, nebo jen stručně $\mathcal{C}(X)$ označuje **množinu všech spojitých funkcí** *$f : X \to \mathbb{R}$.*

Protože lineární kombinace spojitých funkcí je zřejmě opět spojitá funkce, $\mathcal{C}(X)$ je lineární podprostor v $\mathbb{R}^X$.

Příklady III

Příklad 1.3

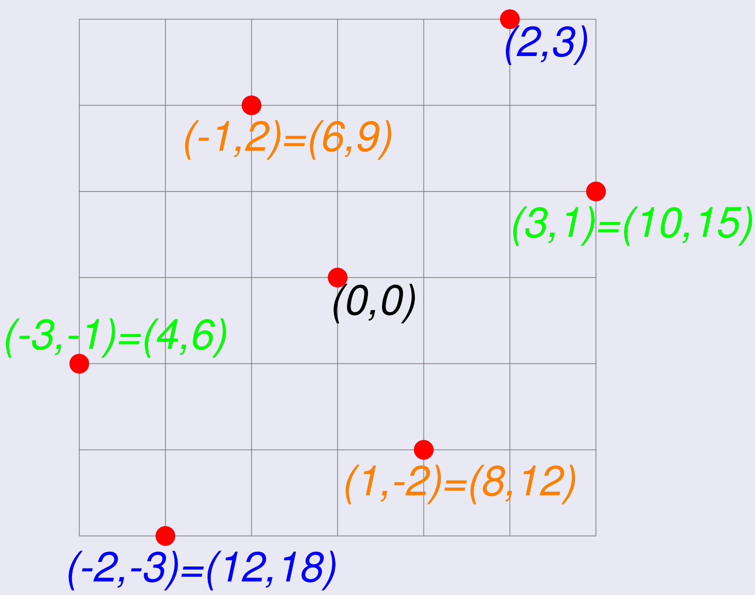
(c)



Příklady IV

Příklad 1.3

(d) Přímka $\{t(2,3) \mid t \in \mathbb{Z}_7\}$ *v prostoru* $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$.



Příklady V

Příklad 1.4

(e) Podprostor řešení lineárních rekurentních rovnic
Uvažujme homogenní lineární rekurentní rovnici druhého řádu:

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$$

Řešení:
1. Charakteristická rovnice
Sestavíme charakteristickou rovnici:

$$\begin{aligned} r^2 &= 5r - 6 \\ r^2 - 5r + 6 &= 0 \\ (r-2)(r-3) &= 0 \\ r_1 = 2, r_2 &= 3 \end{aligned}$$

Příklady VI

Příklad 1.4

(e) Podprostor řešení lineárních rekurentních rovnic
2. Obecné řešení má tvar:

$$a_n = c_1(2^n) + c_2(3^n)$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *jsou libovolné reálné konstanty.*

3. Množina všech řešení tvoří dvourozměrný vektorový podprostor prostoru reálných posloupností.
Uzavřenost vůči sčítání: Nechť $a_n = c_1(2^n) + c_2(3^n)$ *a* $b_n = d_1(2^n) + d_2(3^n)$ *jsou dvě řešení. Jejich součet je:*

$$a_n + b_n = (c_1 + d_1)(2^n) + (c_2 + d_2)(3^n)$$

což je opět řešení.

Příklady VII

Příklad 1.4

(e) Podprostor řešení lineárních rekurentních rovnic

Uzavřenost vůči násobení skalárem: Pro libovolné $k \in \mathbb{R}$ a řešení $a_n = c_1(2^n) + c_2(3^n)$ platí:

$$k \cdot a_n = (kc_1)(2^n) + (kc_2)(3^n)$$

což je opět řešení.

Nulový prvek: Pro $c_1 = c_2 = 0$ dostáváme nulové řešení:

$$0 = 0 \cdot 2^n + 0 \cdot 3^n$$

Obsah

Definice lineárního obalu I

Definice 2

Množinu všech lineárních kombinací vektorů z podmnožiny X vektorového prostoru V nazýváme **lineárním obalem** *množiny X a označujeme ji $[X]$.*

Tedy

$$[X] = \{a_1\mathbf{x}_1 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n;\ n \in \mathbb{N} \\ \& \ a_1, \ldots, a_n \in K \ \& \ \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in X\}.$$

Je-li $X = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ konečná množina, tak místo $[\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}]$ píšeme jen $[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$.
Zřejmě tento zápis má smysl i pro libovolou uspořádanou n-tici (ne nutně různých) vektorů $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$, a platí

$$[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n] = \{a_1\mathbf{x}_1 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n;\ a_1, \ldots, a_n \in K\}.$$

Definice lineárního obalu II

Tvrzení 2.1

Nechť X je podmnožina vektorového prostoru V. Potom lineární obal $[X]$ množiny X je nejmenší lineární podprostor vektorového prostoru V takový, že $X \subseteq [X]$.

Dokázané tvrzení nás opravňuje nazývat lineární obal $[X]$ množiny $X \subseteq V$ též lineárním podprostorem ***generovaným*** množinou X.

Definice 3

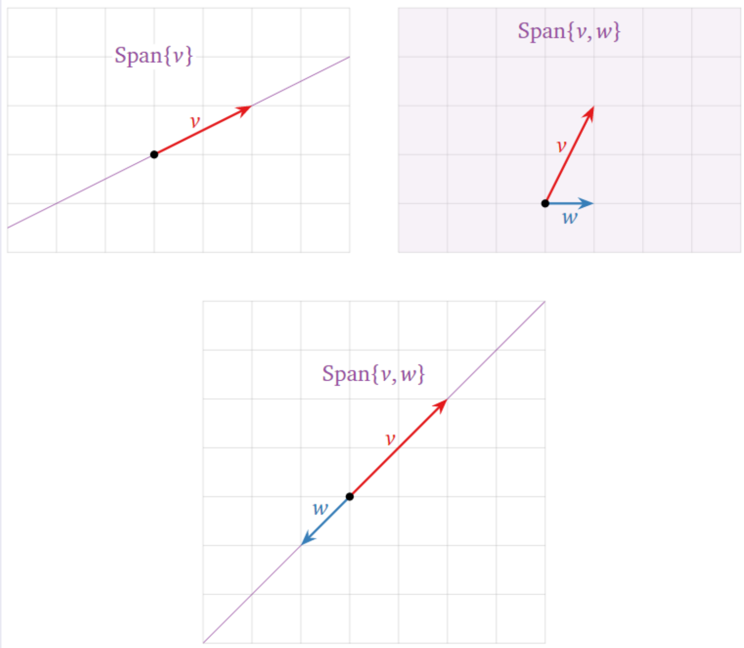
Pokud $[X] = S$, říkáme, že X **generuje** *lineární podprostor S, případně, že X je* **generující množina** *nebo též* **množina generátorů** *lineárního podprostoru $S \subseteq V$.*

Je-li $S = V$, tj. je-li $[X] = V$, mluvíme o ***generující množině***. Používá se též název ***vytvářející či vytvořující množina***.

Příklady I

Příklad 2.2

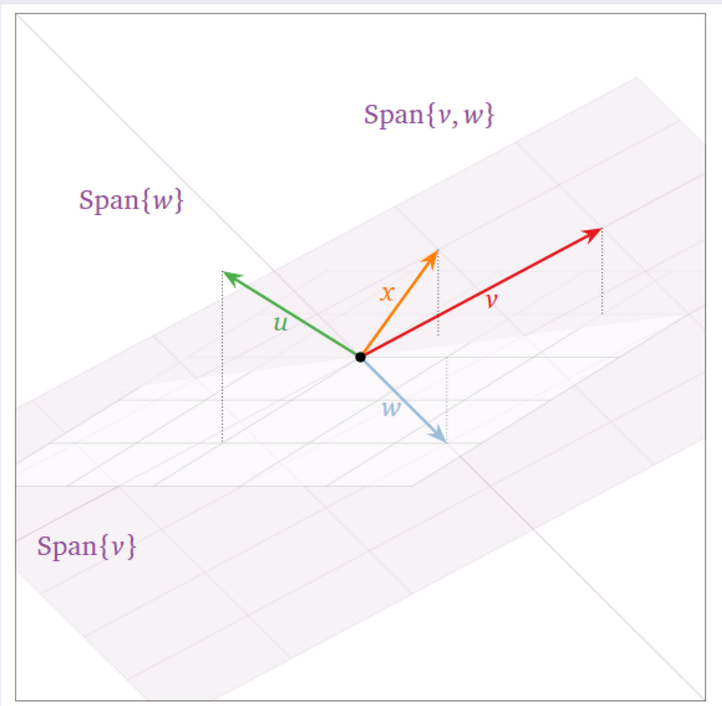
(a)



Příklady II

Příklad 2.2

(b)



Vlastnosti lineárního obalu

Kvůli přehlednosti ještě shrneme základní vlastnosti operace lineárního obalu $X \mapsto [X]$.

Tvrzení 2.3

Pro libovolné podmnožiny X, Y vektorového prostoru V a $\mathbf{v} \in V$ platí:

(a) $[\emptyset] = [\mathbf{0}] = \{\mathbf{0}\}$;

(b) $X \subseteq [X]$;

(c) $X \subseteq Y \Rightarrow [X] \subseteq [Y]$;

(d) *X je lineární podprostor ve V právě tehdy, když $X = [X]$;*

(e) $[[X]] = [X]$;

(f) $\mathbf{v} \in [X] \Leftrightarrow [X \cup \{\mathbf{v}\}] = [X]$.

Obsah

Součet lineárních podprostorů I

Definice 4

Nechť X, Y jsou libovolné podmnožiny vektorového prostoru V.

Potom množinu

$$X + Y = \{\mathbf{x} + \mathbf{y};\ \mathbf{x} \in X \ \&\ \mathbf{y} \in Y\}$$

nazýváme **součtem** *množin X, Y.*

Tvrzení 3.1

Nechť S, T jsou lineární podprostory vektorového prostoru V. Potom i $S \cap T$ a $S + T$ jsou lineární podprostory ve V. Navíc platí

$$S + T = [S \cup T],$$

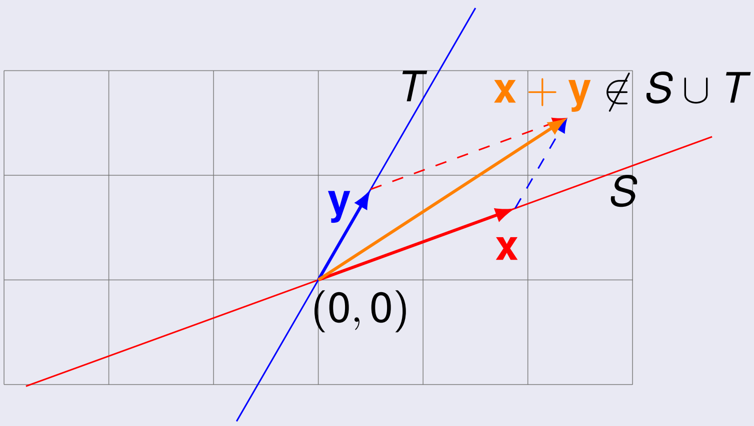
t. j. $S + T$ je **nejmenší lineární podprostor** *ve V, který obsahuje S i T.*

Součet lineárních podprostorů II

Sjednocení dvou lineárních podprostorů S, T vektorového prostoru V nemusí být lineárním podprostorem.

Příklad 3.2

Uvažme vektorový prostor $V = \mathbb{R}^2$ a podprostory S a T buďte různé přímky procházející počátkem a nechť $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in S$, $\mathbf{0} \neq \mathbf{y} \in T$.



Součet lineárních podprostorů III

Přesněji, $S \cup T$ je lineární podprostor ve V právě tehdy, když $S \subseteq T$ nebo $T \subseteq S$.

Definice 5

Součet lineárních podprostorů S, T vektorového prostoru V nazýváme **přímý** *nebo též* **direktní součet**, *pokud $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$; píšeme pak $S \oplus T$.*

Tvrzení 3.3

Nechť S, T jsou lineární podprostory vektorového prostoru V. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) *$S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, tj. součet $S + T$ je direktní;*

(ii) *každý vektor $\mathbf{z} \in S + T$ má jednoznačné vyjádření ve tvaru $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, kde $\mathbf{x} \in S$, $\mathbf{y} \in T$.*

Obsah

Lineární závislost I

Definice 6

Říkáme, že uspořádaná n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ *je* **lineárně závislá**, *pokud existují skaláry* $c_1, \ldots, c_n \in K$ *tak, že* $(c_1, \ldots, c_n) \neq \mathbf{0}$ *a* $c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$.
V opačném případě říkáme, že uspořádaná n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ *je* **lineárně nezávislá**.

Pro $n = 0$ kvůli úplnosti dodávame, že uspořádanou 0-**tici** (tj. ***prázdnou posloupnost***) vektorů považujeme za lineárně nezávislou.

Místo o "lineárně (ne)závislé uspořádané n-tici vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$" budeme často mluvit jen o lineárně (ne)závislých vektorech $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$.

Lineární závislost II

Podle definice lineární nezávislosti jsou vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ ***lineárně nezávislé*** právě tehdy, když

$$(\forall\, c_1, \ldots, c_n \in K)$$
$$(c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; c_1 = \ldots = c_n = 0).$$

Pro n-tici skalárů $(c_1, \ldots, c_n) = \mathbf{0}$ platí

$$c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

pro libovolnou n-tici vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$, bez ohledu na to, zda je lineárně závislá nebo nezávislá.

Lineární závislost III

Pro některé n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ můžeme jako výsledek lineární kombinace $c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ dostat $\mathbf{0}$ i s pomocí ***jiné*** n-tice skalárů $(c_1, \ldots, c_n)$ než jen $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ – takovéto uspořádané n-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ nazýváme ***lineárně závislé***.

Pro některé uspořádané n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je volba $(c_1, \ldots, c_n) = \mathbf{0}$ ***jediná možnost***, jak pomocí lineární kombinace $c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ získáme výsledek $\mathbf{0}$ – takovéto n-tice nazýváme ***lineárně nezávislé***.

Lineární závislost IV

Platí čtyři jednoduchá pozorování:

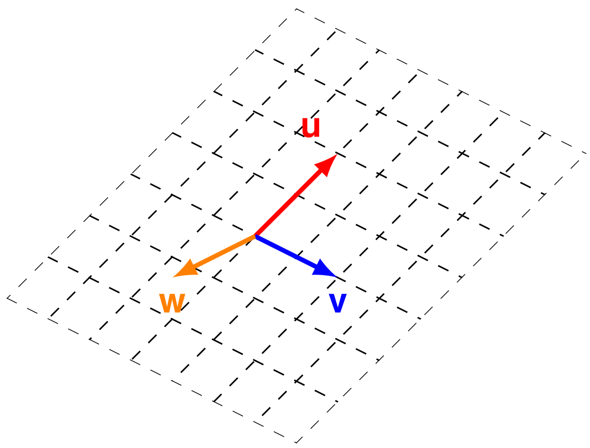
(a) jediný vektor $\mathbf{u}$ je lineárně nezávislý právě tehdy, když $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$;
(b) vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z nich je násobkem druhého;
(c) je-li některý z vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ roven $\mathbf{0}$, pak jsou tyto vektory lineárně závislé;
(d) pokud se některé dva z vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ rovnají, pak jsou tyto vektory lineárně závislé.

Jinak řečeno, pouze uspořádaná n-tice nenulových a navzájem různých vektorů, z kterých žádný není násobkem druhého, může (ale stále ještě nemusí) být lineárně nezávislá.

Lineární závislost V

Následující tabulka shrnuje vztah lineární závislosti vzhledem k relaci inkluze.

	$S_1 \subseteq S$	$S_1 \supseteq S$
S nezávislá	S_1 bude nezávislá	S_1 může být oboje
S závislá	S_1 může být oboje	S_1 bude závislá



Lineární závislost VI

Tvrzení 4.1

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) *vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně závislé;*

(ii) *některý z vektorů $\mathbf{u}_k$, $k \leq n$, je lineární kombinací předcházejících;*

(ii') *některý z vektorů $\mathbf{u}_k$, $k \leq n$, je lineární kombinací nasledujících;*

(iii) *některý z vektorů $\mathbf{u}_k$, $k \leq n$, je lineární kombinace ostatních.*

Lineární závislost VII

Každý vektor $\mathbf{x}$ z lineárního obalu $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$$

pro nějakou n-tici skalárů $(c_1, \ldots, c_n)$.

Tvrzení 4.2

Vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když každý vektor $\mathbf{x} \in [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ můžeme vyjádřit ve tvaru $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ pro jedinou uspořádanou n-tici $(c_1, \ldots, c_n) \in K^n$.

Lineární závislost VIII

Nasledující tvrzení dává do souvislosti lineární (ne)závislost s lineárním obalem.

Tvrzení 4.3

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v} \in V$, přičemž vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) $\mathbf{v} \in [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$;

(ii) *vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}$ jsou lineárně závislé;*

(iii) $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}] = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$.

Lineární závislost IX

Věta 4.4

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$*, přičemž vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *jsou lineárně nezávislé. Potom z množiny* $\{1, \ldots, m\}$ *můžeme vybrat indexy* $i_1 < \ldots < i_k$ *tak, že vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_{i_1}, \ldots, \mathbf{v}_{i_k}$ *jsou lineárně nezávislé a generují stejný podprostor jako vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$.

Lineární obal v prostorech K^m I

Použití téže metody úpravy matic pomocí ERO na (redukovaný) stupňovitý tvar na řešení následujících tří otázek:

(1) rozhodnout pro dané vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y} \in K^m$, zda $\mathbf{y}$ patří nebo nepatří do lineárního obalu $[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$;

(2) rozhodnout pro dané vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in K^m$, zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé;

(3) vybrat z vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in K^m$ lineárně nezávislé vektory $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}$ ($j_1 < \ldots < j_k$) tak, aby vektory $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}$ generovaly v K^m stejný lineární podprostor jako vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Zavedeme dále označení, kterého sa budeme držet v celém odstavci.

Lineární obal v prostorech K^m II

Nechť $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y} \in K^m$ jsou sloupcové vektory, přičemž

$$\mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Označme $\mathbf{X} = (x_{ij}) \in K^{m \times n}$ matici se sloupci $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, a $(\mathbf{X} \,|\, \mathbf{y}) \in K^{m \times (n+1)}$ blokovou matici složenou z matice $\mathbf{X}$ a vektoru $\mathbf{y}$.

Lineární obal v prostorech K^m III

Potom pro $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in K^n$ platí:

(1) $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}$;

(2) $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Jinak řečeno:

(1) $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$ právě tehdy, když soustava $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}$ s rozšířenou maticí $(\mathbf{X} \,|\, \mathbf{y})$ má alespoň jedno řešení;

(2) vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když homogenní soustava $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$ má jediné řešení $\mathbf{c} = \mathbf{0}$; pokud tato soustava má i nějaké nenulové řešení, tak vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně závislé.

Lineární obal v prostorech K^m IV

Otázku (1) umíme řešit. Stačí pomocí ERO upravit matici $(\mathbf{X} \mid \mathbf{y})$ na stupňovitý tvar.

Pokud výsledná matice obsahuje řádek tvaru $(0, \dots, 0 \mid z)$, kde $z \neq 0$, tak soustava $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}$ nemá řešení a $\mathbf{y} \notin [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$.

Pokud sa takovýto řádek ve výsledné matici nenachází, tak soustava má alespoň jedno řešení a $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$.

Podobně je tomu s otázkou (2). Opět stačí pomocí ERO upravit matici $\mathbf{X}$ na stupňovitý tvar a podívat se, zda v každém sloupci leží vedoucí prvek nějakého řádku.

Pokud tento případ nastane, nemáme možnost zvolit parametry, $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ je jediným řešením soustavy $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$ a vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně nezávislé.

Lineární obal v prostorech K^m V

V opačném případě máme možnost volby alespoň jednoho parametru, soustava má tedy nějaké nenulové řešení a vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ jsou ***lineárně závislé***.

Vedoucím prvkem řádku $(0, \dots, 0 \mid z)$, kde $z \neq 0$, je právě v $(n+1)$-ním sloupci ležící prvek z.

Tedy matice v stupňovitém tvaru, která je řádkově ekvivalentní s $(\mathbf{X} \mid \mathbf{y})$ neobsahuje takový řádek právě tehdy, když ***v jejím posledním sloupci neleží vedoucí prvek žádného řádku***.

Lineární obal v prostorech K^m VI

Příklad 4.5

Uvažme sloupcové vektory $\mathbf{x}_1 = (1, 1, -1, -1)^T$, $\mathbf{x}_2 = (0, 1, 0, 1)^T$, $\mathbf{x}_3 = (3, 1, -3, -5)^T$, $\mathbf{x}_4 = (0, 0, 1, 2)^T$, $\mathbf{y} = (3, 5, -2, 1)^T$, $\mathbf{z} = (1, 1, 1, 1)^T$ *v prostoru* $\mathbb{R}^4$.

Máme rozhodnout, zda vektory $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ *leží v lineárním obalu* $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4]$.

Označme si následující matice

$$(\mathbf{X}\,|\,\mathbf{y}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right), \quad (\mathbf{X}\,|\,\mathbf{z}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Lineární obal v prostorech K^m VI

Matice $(\mathbf{X}\,|\,\mathbf{y})$, $(\mathbf{X}\,|\,\mathbf{z})$ jsou řádkově ekvivalentní s maticemi

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ resp. } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Okamžitě vidíme, že platí $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4]$ a $\mathbf{z} \notin [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4]$.

Lineární obal v prostorech K^m VI

Příklad 4.6

Zjistíme, zda sloupce reálné matice

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

jsou lineárně závislé nebo nezávislé. Tato matice je řádkově ekvivalentní s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že sloupce matice **X** *jsou lineárně nezávislé.*

Abstrakt
Lineární podprostory
Lineární obal
Průnik a součet
Nezávislost
Závislost
Obal v K^m
LN posloupnosti

Lineární obal v prostorech K^m VII

Z druhé strany, **X** jakožto matice nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ je řádkově ekvivalentní s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy sloupce matice **X**, chápané jakožto vektory z vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^4$, jsou lineárně závislé.

Lineární obal v prostorech K^m VIII

Tvrzení 4.7

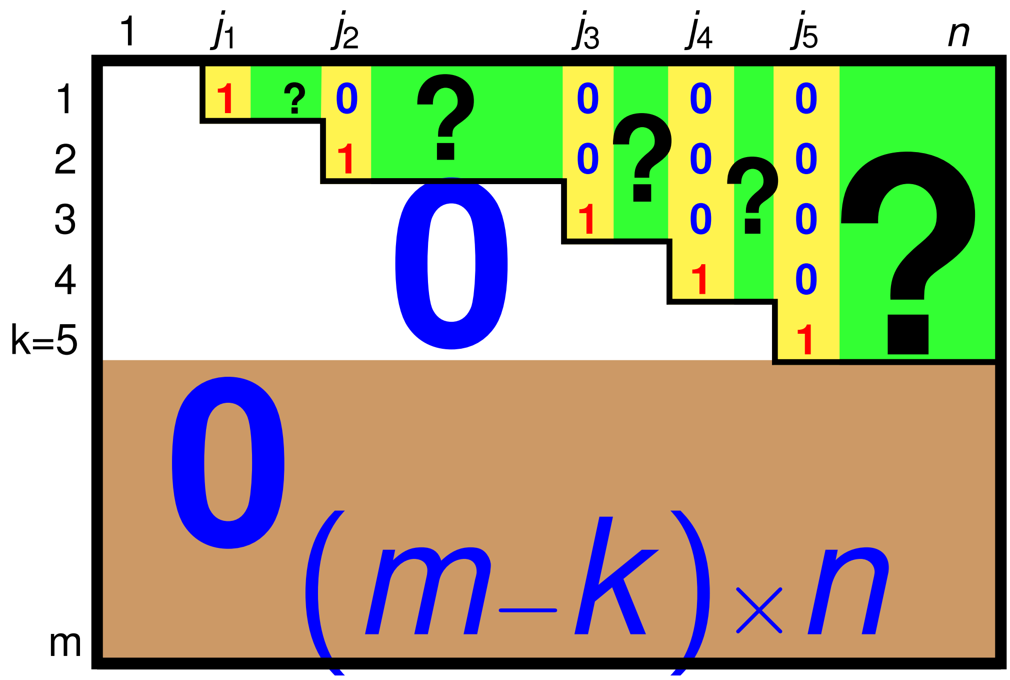
Nechť $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in K^{m\times n}$ *jsou řádkově ekvivalentní matice, přičemž matice* $\mathbf{Y}$ *je ve stupňovitém tvaru. Pro* $1 \leq j \leq n$ *označme* $\mathbf{x}_j = \mathbf{s}_j(\mathbf{X})$ *j-tý sloupec matice* $\mathbf{X}$. *Nechť* $j_1 < \ldots < j_k$ *jsou indexy všech sloupců matice* $\mathbf{Y}$, *ve kterých leží vedoucí prvky jejich řádků. Potom platí:*

(a) vektory $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}$ jsou lineárně nezávislé*;*

(b) pokud v j-tém sloupci matice $\mathbf{Y}$ neleží vedoucí prvek žádného jejího řádku (t. j. $1 \leq j \leq n$ a $j \neq j_1, \ldots, j_k$), tak vektor $\mathbf{x}_j$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_l}$, kde $l \leq k$ je největší index, pro který platí $j_l < j$;

(c) $[\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}] = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$.

Lineární obal v prostorech K^m IX



Redukovaný stupňovitý tvar

Lineární obal v prostorech K^m X

Výše uvedené tvrzení nám dáva přímý návod na řešení otázky (3).

Stačí pomocí ERO upravit matici $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ na matici $\mathbf{Y}$ v stupňovitém tvaru a zjistit v ní indexy $j_1 < \ldots < j_k$ všech sloupců, ve kterých leží vedoucí prvky jejich řádků.

Potom $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}$ jsou hledané lineární nezávislé vektory, které generují lineární podprostor $[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$.

Abstrakt
Lineární podprostory
Lineární obal
Průnik a součet
Nezávislost
Závislost
Obal v K^m
LN posloupnosti

Lineární obal v prostorech K^m XI

Příklad 4.8

Ze sloupců reálné matice

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

je třeba vybrat lineární nezávislé sloupce, které generují lineární obal všech sloupců matice $\mathbf{X}$.

Matice $\mathbf{X}$ *je řádkově ekvivalentní s maticí*

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lineární obal v prostorech K^m XII

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je ve stupňovitém tvaru. Vedoucí prvky řádků matice **Y** se nachází ve sloupcích 1, 2 a 4.

Hledané vektory jsou tedy sloupce 1, 2 a 4 matice **X**. Zapsané vedle sebe pak tvoří matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abstrakt Lineární podprostory | Lineární obal Průnik a součet | Nezávislost | Závislost Obal v K^m | LN posloupnosti

Lineární obal v prostorech K^m XIII

Poznámka. Výše uvedený postup řešení otázek (1), (2) a (3) pro prostory sloupcových vektorů K^m lze modifikovat na prostory řádkových vektorů K^m – např. transponováním příslušných matic řádkových vektorů nebo nahrazením elementárních řádkových operací sloupcovými.

Lineárně nezávislé posloupnosti I

Nekonečnou posloupnost $(\mathbf{u}_k)_{k=0}^{\infty} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \ldots)$ vektorů z prostoru V nazýváme ***lineárně nezávislou***, pokud každá její konečná podposloupnost $(\mathbf{u}_{k_1}, \ldots, \mathbf{u}_{k_n})$, kde $0 \leq k_1 < \ldots < k_n$, je lineárně nezávislá.

Tvrzení 4.9

Nekonečná posloupnost $(\mathbf{u}_k)_{k=0}^{\infty}$ *vektorů z* V *je lineárně nezávislá právě tehdy, když pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je její počáteční úsek* $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ *lineárně nezávislý.*

Například posloupnost $(1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots)$ všech mocnin x je lineárně nezávislá posloupnost ve vektorovém prostoru $K[x]$ všech polynomů v proměnné x nad tělesem K.
Polynom $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ je (definitoricky) nulový právě tehdy, když $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Abstrakt
Lineární podprostory
Lineární obal
Průnik a součet
Nezávislost
Závislost
Obal v K^m
LN posloupnosti

Lineárně nezávislé posloupnosti II

Množina $X \subseteq V$ sa nazývá ***lineárně nezávislá***, pokud pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ každá uspořádaná n-tice ***navzájem různých*** vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ z množiny X je lineárně nezávislá.

Kdyby totiž $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ nebyly navzájem různé vektory, nemohly by být lineárně nezávislé.

Lineární závislost či nezávislost uspořádané n-tice vektorů nezávisí na jejich pořadí.

Zřejmě uspořádaná n-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když je lineárně nezávislá uspořádaná n-tice $(\mathbf{u}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{u}_{\sigma(n)})$, kde σ je libovolná permutace množiny $\{1, \ldots, n\}$.

Lineárně nezávislé posloupnosti III

Lineární (ne)závislost uspořádané n-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ navzájem různých vektorů je vlastností množiny $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$.

Tvrzení 4.10

Uspořádaná n-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ navzájem různých vektorů z V je lineárně nezávislá právě tehdy, když množina $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subseteq V$ je lineárně nezávislá.

Tvrzení 4.11

Nechť $X \subseteq V$ je lineárně nezávislá množina a $\mathbf{v} \in V$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) $\mathbf{v} \in [X]$;

(ii) *množina $X \cup \{\mathbf{v}\}$ je lineárně závislá;*

(iii) $[X \cup \{\mathbf{v}\}] = [X]$.