6. LINEÁRNÍ PODPROSTORY a LINEÁRNÍ NEZÁVISLOST

Jan Paseka

Ústav matematiky a statistiky
Masarykova univerzita

22. října 2024

Obsah

Abstrakt

V této kapitole budeme pokračovat ve studiu abstraktních vektorových prostorů nad obecným tělesem.

Abstrakt

V této kapitole budeme pokračovat ve studiu abstraktních vektorových prostorů nad obecným tělesem.

K tedy bude v celé kapitole označovat nějaké pevné, jinak libovolné těleso a V bude pevně zvolený vektorový prostor nad K.

Obsah

Lineární podprostory I

Definice 1

Množina $S \subseteq V$ se nazýva **lineární (vektorový) podprostor** *vektorového prostoru V, pokud $S \neq \emptyset$ a pro všechny skaláry $a \in K$ a vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ platí $a\mathbf{x} \in S$ a $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$.*

Lineární podprostory I

Definice 1

Množina $S \subseteq V$ se nazýva **lineární (vektorový) podprostor** *vektorového prostoru V, pokud $S \neq \emptyset$ a pro všechny skaláry $a \in K$ a vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ platí $a\mathbf{x} \in S$ a $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$.*

Jinak řečeno, neprázdná podmnožina $S \subseteq V$ je lineární podprostor právě tehdy, když je uzavřená na operace skalárního násobku a součtu vektorů.

Lineární podprostory I

Definice 1

Množina $S \subseteq V$ se nazýva **lineární (vektorový) podprostor** *vektorového prostoru V, pokud $S \neq \emptyset$ a pro všechny skaláry $a \in K$ a vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ platí $a\mathbf{x} \in S$ a $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$.*

Jinak řečeno, neprázdná podmnožina $S \subseteq V$ je lineární podprostor právě tehdy, když je uzavřená na operace skalárního násobku a součtu vektorů.

Tvrzení 1.1

Nechť S je lineární podprostor vektorového prostoru V. Pak $\mathbf{0} \in S$ a S s operacemi součtu vektorů a skalárního násobku zúženými z V na S **tvoří vektorový prostor** *nad (číselným) tělesem K.*

Lineární podprostory II

V každém vektorovém prostoru V jsou $\{\mathbf{0}\}$ a V lineární podprostory (v případě, když $V = \{\mathbf{0}\}$, dokonce splývají, v opačném případě jde o dva různé podprostory) –

Lineární podprostory II

V každém vektorovém prostoru V jsou $\{\mathbf{0}\}$ a V lineární podprostory (v případě, když $V = \{\mathbf{0}\}$, dokonce splývají, v opačném případě jde o dva různé podprostory) – $\{\mathbf{0}\}$ nazýváme ***triviální*** nebo též ***nulový*** a V ***nevlastní*** alebo též ***plný*** lineární podprostor.

Lineární podprostory II

V každém vektorovém prostoru V jsou $\{\mathbf{0}\}$ a V lineární podprostory (v případě, když $V = \{\mathbf{0}\}$, dokonce splývají, v opačném případě jde o dva různé podprostory) – $\{\mathbf{0}\}$ nazýváme ***triviální*** nebo též ***nulový*** a V ***nevlastní*** alebo též ***plný*** lineární podprostor.

Tedy pro ***vlastní netriviální*** lineární podprostor $S \subseteq V$ platí $\{\mathbf{0}\} \neq S \neq V$.

Lineární podprostory II

V každém vektorovém prostoru V jsou $\{\mathbf{0}\}$ a V lineární podprostory (v případě, když $V = \{\mathbf{0}\}$, dokonce splývají, v opačném případě jde o dva různé podprostory) – $\{\mathbf{0}\}$ nazýváme ***triviální*** nebo též ***nulový*** a V ***nevlastní*** alebo též ***plný*** lineární podprostor.

Tedy pro ***vlastní netriviální*** lineární podprostor $S \subseteq V$ platí $\{\mathbf{0}\} \neq S \neq V$.

Např. ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ netriviální vlastní podprostory jsou právě všechny přímky a roviny procházející počátkem $\mathbf{0}$.

Lineární podprostory II

V každém vektorovém prostoru V jsou $\{\mathbf{0}\}$ a V lineární podprostory (v případě, když $V = \{\mathbf{0}\}$, dokonce splývají, v opačném případě jde o dva různé podprostory) – $\{\mathbf{0}\}$ nazýváme ***triviální*** nebo též ***nulový*** a V ***nevlastní*** alebo též ***plný*** lineární podprostor.

Tedy pro ***vlastní netriviální*** lineární podprostor $S \subseteq V$ platí $\{\mathbf{0}\} \neq S \neq V$.

Např. ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ netriviální vlastní podprostory jsou právě všechny přímky a roviny procházející počátkem $\mathbf{0}$.

To si můžeme graficky vyjádřit pomocí následujícího obrázku, který samozřejmě ukáže pouze několik z nekonečně mnoha lineárních podprostorů.

Lineární podprostory III

Lineární podprostory jsou popsány pomocí minimálního počtu generátorů.

Lineární podprostory III

Lineární podprostory jsou popsány pomocí minimálního počtu generátorů.

$$\left\{ x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\} \quad \left\{ x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \quad \left\{ x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \quad \cdots$$

$$\left\{ x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \left\{ y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\} \left\{ y\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \right\} \left\{ y\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \quad \cdots$$

$$\left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

Lineární podprostory IV

Následující tvrzení charakterizuje lineární podprostory jako množiny uzavřené na lineární kombinace.

Lineární podprostory IV

Následující tvrzení charakterizuje lineární podprostory jako množiny uzavřené na lineární kombinace.

Tvrzení 1.2

Pro libovolnou podmnožinu S vektorového prostoru V jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) *S je lineární podprostor ve V;*

Lineární podprostory IV

Následující tvrzení charakterizuje lineární podprostory jako množiny uzavřené na lineární kombinace.

Tvrzení 1.2

Pro libovolnou podmnožinu S vektorového prostoru V jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) *S je lineární podprostor ve V;*

(ii) *$S \neq \emptyset$ a pro všechny skaláry $a, b \in K$ a vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ platí $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \in S$;*

Lineární podprostory IV

Následující tvrzení charakterizuje lineární podprostory jako množiny uzavřené na lineární kombinace.

Tvrzení 1.2

Pro libovolnou podmnožinu S vektorového prostoru V jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) *S je lineární podprostor ve V;*

(ii) *$S \neq \emptyset$ a pro všechny skaláry $a, b \in K$ a vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ platí $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \in S$;*

(iii) *pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro všechny skaláry $a_1, \ldots, a_n \in K$ a vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in S$ platí*

$$a_1\mathbf{x}_1 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n \in S.$$

Příklady I

Příklad 1.3

(a) Označme $K^{(X)}$ *množinu všech funkcí* $f : X \to K$ *takových, že množina* $\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}$ *je konečná.*

Příklady I

Příklad 1.3

(a) Označme $K^{(X)}$ *množinu všech funkcí* $f : X \to K$ *takových, že množina* $\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}$ *je konečná.*

Pro libovolnou lineární kombinaci funkcí $f, g \in K^{(X)}$ *platí*

$$\{x \in X;\ af(x) + bg(x) \neq 0\} \subseteq$$
$$\{x \in X;\ f(x) \neq 0\} \cup \{x \in X;\ g(x) \neq 0\}.$$

Příklady I

Příklad 1.3

(a) Označme $K^{(X)}$ *množinu všech funkcí* $f : X \to K$ *takových, že množina* $\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}$ *je konečná.*

Pro libovolnou lineární kombinaci funkcí $f, g \in K^{(X)}$ *platí*

$$\{x \in X;\ af(x) + bg(x) \neq 0\} \subseteq$$
$$\{x \in X;\ f(x) \neq 0\} \cup \{x \in X;\ g(x) \neq 0\}.$$

Protože je pravá strana inkluze konečná, je i levá strana konečná. Z toho vyplývá, že $K^{(X)}$ *je lineární podprostor vektorového prostoru* K^X.

Příklady I

Příklad 1.3

(a) Označme $K^{(X)}$ množinu všech funkcí $f : X \to K$ takových, že množina $\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}$ je konečná.

Pro libovolnou lineární kombinaci funkcí $f, g \in K^{(X)}$ platí

$$\{x \in X;\ af(x) + bg(x) \neq 0\} \subseteq \{x \in X;\ f(x) \neq 0\} \cup \{x \in X;\ g(x) \neq 0\}.$$

Protože je pravá strana inkluze konečná, je i levá strana konečná. Z toho vyplývá, že $K^{(X)}$ je lineární podprostor vektorového prostoru K^X.

Je-li X je konečná, tak $K^{(X)} = K^X$, je-li X je nekonečná, tak $K^{(X)}$ je netriviální vlastní podprostor v K^X.

Příklady II

Příklad 1.3

(b) Nechť $X \subseteq \mathbb{R}$ je libovolná množina reálných čísel. Potom $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, nebo jen stručně $\mathcal{C}(X)$ označuje **množinu všech spojitých funkcí** $f : X \to \mathbb{R}$.

Příklady II

Příklad 1.3

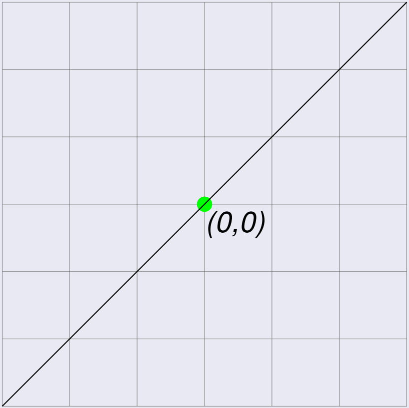
(b) Nechť $X \subseteq \mathbb{R}$ je libovolná množina reálných čísel. Potom $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, nebo jen stručně $\mathcal{C}(X)$ označuje **množinu všech spojitých funkcí** *$f : X \to \mathbb{R}$.*

Protože lineární kombinace spojitých funkcí je zřejmě opět spojitá funkce, $\mathcal{C}(X)$ je lineární podprostor v $\mathbb{R}^X$.

Příklady III

Příklad 1.3

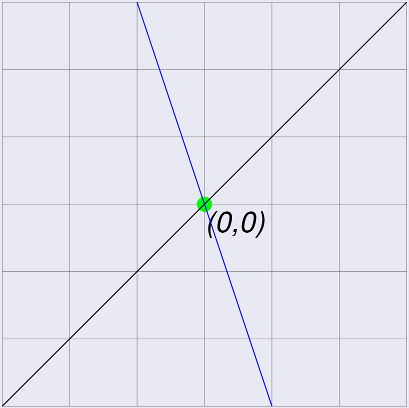
(c)



Příklady III

Příklad 1.3

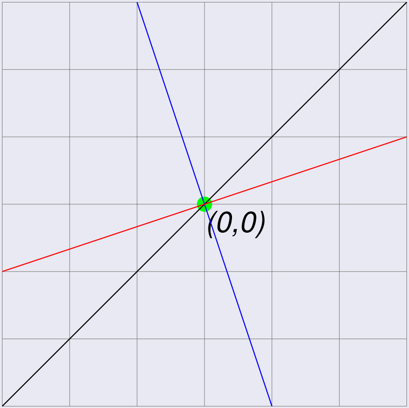
(c)



Příklady III

Příklad 1.3

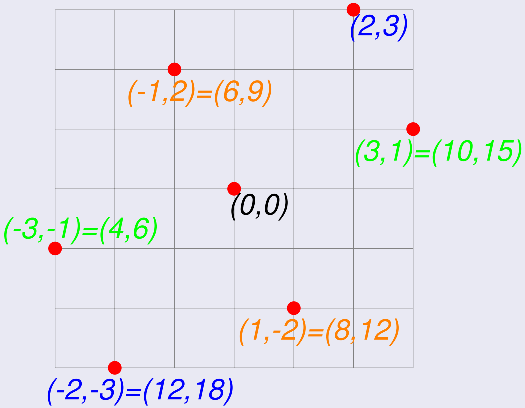
(c)



Příklady IV

Příklad 1.3

(d) Přímka $\{t(2,3) \mid t \in \mathbb{Z}_7\}$ *v prostoru* $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$.



Příklady V

Příklad 1.4

(e) Podprostor řešení lineárních rekurentních rovnic
Uvažujme homogenní lineární rekurentní rovnici druhého řádu:

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$$

Řešení:
1. Charakteristická rovnice
Sestavíme charakteristickou rovnici:

$$\begin{aligned} r^2 &= 5r - 6 \\ r^2 - 5r + 6 &= 0 \\ (r-2)(r-3) &= 0 \\ r_1 = 2, r_2 &= 3 \end{aligned}$$

Příklady VI

Příklad 1.4

(e) Podprostor řešení lineárních rekurentních rovnic
2. Obecné řešení má tvar:

$$a_n = c_1(2^n) + c_2(3^n)$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *jsou libovolné reálné konstanty.*

3. Množina všech řešení tvoří dvourozměrný vektorový podprostor prostoru reálných posloupností.
Uzavřenost vůči sčítání: Nechť $a_n = c_1(2^n) + c_2(3^n)$ *a* $b_n = d_1(2^n) + d_2(3^n)$ *jsou dvě řešení. Jejich součet je:*

$$a_n + b_n = (c_1 + d_1)(2^n) + (c_2 + d_2)(3^n)$$

což je opět řešení.

Příklady VII

Příklad 1.4

(e) Podprostor řešení lineárních rekurentních rovnic

Uzavřenost vůči násobení skalárem: Pro libovolné $k \in \mathbb{R}$ a řešení $a_n = c_1(2^n) + c_2(3^n)$ platí:

$$k \cdot a_n = (kc_1)(2^n) + (kc_2)(3^n)$$

což je opět řešení.

Nulový prvek: Pro $c_1 = c_2 = 0$ dostáváme nulové řešení:

$$0 = 0 \cdot 2^n + 0 \cdot 3^n$$

Obsah

obalu

1. Lineární podprostory
2. Lineární obal množiny vektorů
   - Definice lineárního obalu
   - Příklady
   - Vlastnosti lineárního
3. Průnik a součet lineárních podprostorů
4. Lineární závislost a nezávislost
5. Báze a dimenze

Definice lineárního obalu I

Definice 2

Množinu všech lineárních kombinací vektorů z podmnožiny X vektorového prostoru V nazýváme **lineárním obalem** *množiny X a označujeme ji $[X]$.*

Definice lineárního obalu I

Definice 2

Množinu všech lineárních kombinací vektorů z podmnožiny X vektorového prostoru V nazýváme **lineárním obalem** *množiny X a označujeme ji $[X]$.*

Tedy

$$[X] = \{a_1\mathbf{x}_1 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n;\ n \in \mathbb{N} \\ \& \ a_1, \ldots, a_n \in K \ \& \ \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in X\}.$$

Definice lineárního obalu I

Definice 2

Množinu všech lineárních kombinací vektorů z podmnožiny X vektorového prostoru V nazýváme **lineárním obalem** *množiny X a označujeme ji $[X]$.*

Tedy

$$[X] = \{a_1\mathbf{x}_1 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n;\ n \in \mathbb{N} \\ \&\ a_1, \ldots, a_n \in K \ \&\ \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in X\}.$$

Je-li $X = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ konečná množina, tak místo $[\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}]$ píšeme jen $[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$.

Definice lineárního obalu I

Definice 2

Množinu všech lineárních kombinací vektorů z podmnožiny X vektorového prostoru V nazýváme **lineárním obalem** *množiny X a označujeme ji $[X]$.*

Tedy

$$[X] = \{a_1\mathbf{x}_1 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n;\ n \in \mathbb{N} \\ \&\ a_1, \ldots, a_n \in K\ \&\ \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in X\}.$$

Je-li $X = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ konečná množina, tak místo $[\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}]$ píšeme jen $[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$.
Zřejmě tento zápis má smysl i pro libovolou uspořádanou n-tici (ne nutně různých) vektorů $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$, a platí

$$[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n] = \{a_1\mathbf{x}_1 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n;\ a_1, \ldots, a_n \in K\}.$$

Definice lineárního obalu II

Tvrzení 2.1

Nechť X je podmnožina vektorového prostoru V. Potom lineární obal $[X]$ množiny X je nejmenší lineární podprostor vektorového prostoru V takový, že $X \subseteq [X]$.

Definice lineárního obalu II

Tvrzení 2.1

Nechť X je podmnožina vektorového prostoru V. Potom lineární obal $[X]$ množiny X je nejmenší lineární podprostor vektorového prostoru V takový, že $X \subseteq [X]$.

Dokázané tvrzení nás opravňuje nazývat lineární obal $[X]$ množiny $X \subseteq V$ též lineárním podprostorem ***generovaným*** množinou X.

Definice lineárního obalu II

Tvrzení 2.1

Nechť X je podmnožina vektorového prostoru V. Potom lineární obal $[X]$ množiny X je nejmenší lineární podprostor vektorového prostoru V takový, že $X \subseteq [X]$.

Dokázané tvrzení nás opravňuje nazývat lineární obal $[X]$ množiny $X \subseteq V$ též lineárním podprostorem ***generovaným*** množinou X.

Definice 3

Pokud $[X] = S$, říkáme, že X **generuje** *lineární podprostor S, případně, že X je* **generující množina** *nebo též* **množina generátorů** *lineárního podprostoru $S \subseteq V$.*

Definice lineárního obalu II

Tvrzení 2.1

Nechť X je podmnožina vektorového prostoru V. Potom lineární obal $[X]$ množiny X je nejmenší lineární podprostor vektorového prostoru V takový, že $X \subseteq [X]$.

Dokázané tvrzení nás opravňuje nazývat lineární obal $[X]$ množiny $X \subseteq V$ též lineárním podprostorem ***generovaným*** množinou X.

Definice 3

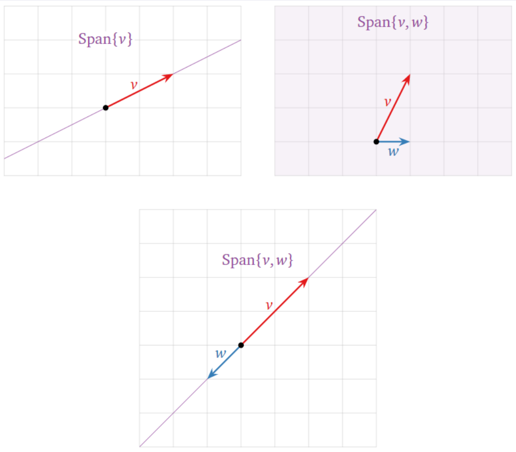
Pokud $[X] = S$, říkáme, že X **generuje** *lineární podprostor S, případně, že X je* **generující množina** *nebo též* **množina generátorů** *lineárního podprostoru $S \subseteq V$.*

Je-li $S = V$, tj. je-li $[X] = V$, mluvíme o ***generující množině***. Používá se též název ***vytvářející či vytvořující množina***.

Příklady I

Příklad 2.2

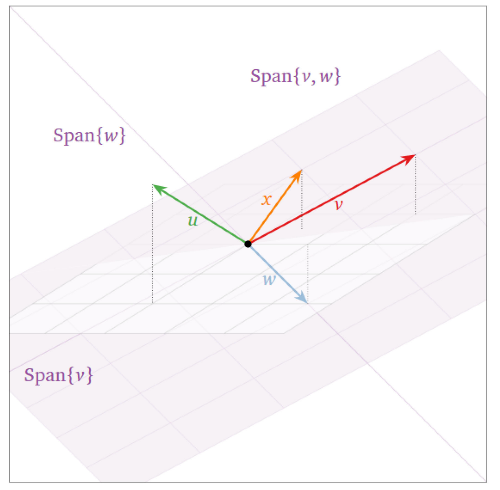
(a)



Příklady II

Příklad 2.2

(b)



Vlastnosti lineárního obalu

Kvůli přehlednosti ještě shrneme základní vlastnosti operace lineárního obalu $X \mapsto [X]$.

Tvrzení 2.3

Pro libovolné podmnožiny X, Y vektorového prostoru V a $\mathbf{v} \in V$ platí:

Vlastnosti lineárního obalu

Kvůli přehlednosti ještě shrneme základní vlastnosti operace lineárního obalu $X \mapsto [X]$.

Tvrzení 2.3

Pro libovolné podmnožiny X, Y vektorového prostoru V a $\mathbf{v} \in V$ platí:

(a) $[\emptyset] = [\mathbf{0}] = \{\mathbf{0}\}$;

Vlastnosti lineárního obalu

Kvůli přehlednosti ještě shrneme základní vlastnosti operace lineárního obalu $X \mapsto [X]$.

Tvrzení 2.3

Pro libovolné podmnožiny X, Y vektorového prostoru V a $\mathbf{v} \in V$ platí:

(a) $[\emptyset] = [\mathbf{0}] = \{\mathbf{0}\}$;

(b) $X \subseteq [X]$;

Vlastnosti lineárního obalu

Kvůli přehlednosti ještě shrneme základní vlastnosti operace lineárního obalu $X \mapsto [X]$.

Tvrzení 2.3

Pro libovolné podmnožiny X, Y vektorového prostoru V a $\mathbf{v} \in V$ platí:

(a) $[\emptyset] = [\mathbf{0}] = \{\mathbf{0}\}$;

(b) $X \subseteq [X]$;

(c) $X \subseteq Y \Rightarrow [X] \subseteq [Y]$;

Vlastnosti lineárního obalu

Kvůli přehlednosti ještě shrneme základní vlastnosti operace lineárního obalu $X \mapsto [X]$.

Tvrzení 2.3

Pro libovolné podmnožiny X, Y vektorového prostoru V a $\mathbf{v} \in V$ platí:

(a) $[\emptyset] = [\mathbf{0}] = \{\mathbf{0}\}$;

(b) $X \subseteq [X]$;

(c) $X \subseteq Y \Rightarrow [X] \subseteq [Y]$;

(d) X *je lineární podprostor ve* V *právě tehdy, když* $X = [X]$;

Vlastnosti lineárního obalu

Kvůli přehlednosti ještě shrneme základní vlastnosti operace lineárního obalu $X \mapsto [X]$.

Tvrzení 2.3

Pro libovolné podmnožiny X, Y vektorového prostoru V a $\mathbf{v} \in V$ platí:

(a) $[\emptyset] = [\mathbf{0}] = \{\mathbf{0}\}$;

(b) $X \subseteq [X]$;

(c) $X \subseteq Y \Rightarrow [X] \subseteq [Y]$;

(d) *X je lineární podprostor ve V právě tehdy, když* $X = [X]$;

(e) $[[X]] = [X]$;

Vlastnosti lineárního obalu

Kvůli přehlednosti ještě shrneme základní vlastnosti operace lineárního obalu $X \mapsto [X]$.

Tvrzení 2.3

Pro libovolné podmnožiny X, Y vektorového prostoru V a $\mathbf{v} \in V$ platí:

(a) $[\emptyset] = [\mathbf{0}] = \{\mathbf{0}\}$;

(b) $X \subseteq [X]$;

(c) $X \subseteq Y \Rightarrow [X] \subseteq [Y]$;

(d) *X je lineární podprostor ve V právě tehdy, když $X = [X]$;*

(e) $[[X]] = [X]$;

(f) $\mathbf{v} \in [X] \Leftrightarrow [X \cup \{\mathbf{v}\}] = [X]$.

Obsah

Součet lineárních podprostorů I

Definice 4

Nechť X, Y jsou libovolné podmnožiny vektorového prostoru V.

Součet lineárních podprostorů I

Definice 4

Nechť X, Y jsou libovolné podmnožiny vektorového prostoru V.

Potom množinu

$$X + Y = \{\mathbf{x} + \mathbf{y};\ \mathbf{x} \in X \ \&\ \mathbf{y} \in Y\}$$

nazýváme **součtem** *množin X, Y.*

Součet lineárních podprostorů I

Definice 4

Nechť X, Y jsou libovolné podmnožiny vektorového prostoru V.

Potom množinu

$$X + Y = \{\mathbf{x} + \mathbf{y};\ \mathbf{x} \in X \ \&\ \mathbf{y} \in Y\}$$

nazýváme **součtem** *množin X, Y.*

Tvrzení 3.1

Nechť S, T jsou lineární podprostory vektorového prostoru V. Potom i $S \cap T$ a $S + T$ jsou lineární podprostory ve V.

Součet lineárních podprostorů I

Definice 4

Nechť X, Y jsou libovolné podmnožiny vektorového prostoru V.

Potom množinu

$$X + Y = \{\mathbf{x} + \mathbf{y};\ \mathbf{x} \in X \ \&\ \mathbf{y} \in Y\}$$

nazýváme **součtem** *množin X, Y.*

Tvrzení 3.1

Nechť S, T jsou lineární podprostory vektorového prostoru V. Potom i $S \cap T$ a $S + T$ jsou lineární podprostory ve V. Navíc platí

$$S + T = [S \cup T],$$

t. j. $S + T$ je **nejmenší lineární podprostor** *ve V, který obsahuje S i T.*

Součet lineárních podprostorů II

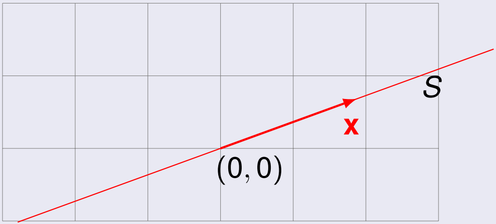
Sjednocení dvou lineárních podprostorů** S, T **vektorového prostoru** V **nemusí být lineárním podprostorem.

Součet lineárních podprostorů II

Sjednocení dvou lineárních podprostorů S, T vektorového prostoru V nemusí být lineárním podprostorem.

Příklad 3.2

Uvažme vektorový prostor $V = \mathbb{R}^2$ a podprostory S a T buďte různé přímky procházející počátkem a nechť $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in S$, $\mathbf{0} \neq \mathbf{y} \in T$.

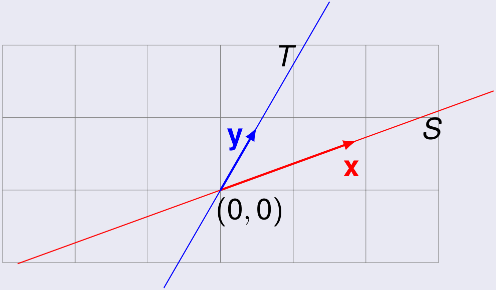


Součet lineárních podprostorů II

Sjednocení dvou lineárních podprostorů S, T vektorového prostoru V nemusí být lineárním podprostorem.

Příklad 3.2

Uvažme vektorový prostor $V = \mathbb{R}^2$ a podprostory S a T buďte různé přímky procházející počátkem a nechť $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in S$, $\mathbf{0} \neq \mathbf{y} \in T$.

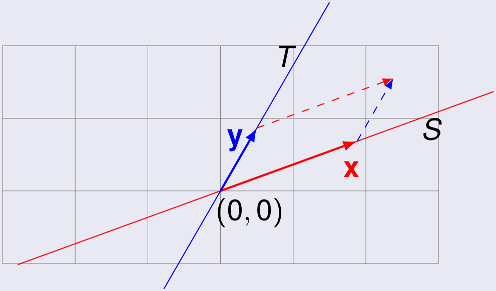


Součet lineárních podprostorů II

Sjednocení dvou lineárních podprostorů S, T vektorového prostoru V nemusí být lineárním podprostorem.

Příklad 3.2

Uvažme vektorový prostor $V = \mathbb{R}^2$ a podprostory S a T buďte různé přímky procházející počátkem a nechť $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in S$, $\mathbf{0} \neq \mathbf{y} \in T$.

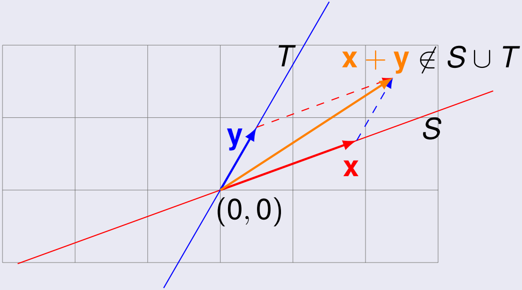


Součet lineárních podprostorů II

Sjednocení dvou lineárních podprostorů S, T vektorového prostoru V nemusí být lineárním podprostorem.

Příklad 3.2

Uvažme vektorový prostor $V = \mathbb{R}^2$ a podprostory S a T buďte různé přímky procházející počátkem a nechť $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in S$, $\mathbf{0} \neq \mathbf{y} \in T$.



Součet lineárních podprostorů III

Přesněji, $S \cup T$ je lineární podprostor ve V právě tehdy, když $S \subseteq T$ nebo $T \subseteq S$.

Součet lineárních podprostorů III

Přesněji, $S \cup T$ je lineární podprostor ve V právě tehdy, když $S \subseteq T$ nebo $T \subseteq S$.

Definice 5

Součet lineárních podprostorů S, T vektorového prostoru V nazýváme **přímý** *nebo též* **direktní součet**, *pokud $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$; píšeme pak $S \oplus T$.*

Součet lineárních podprostorů III

Přesněji, $S \cup T$ je lineární podprostor ve V právě tehdy, když $S \subseteq T$ nebo $T \subseteq S$.

Definice 5

Součet lineárních podprostorů S, T vektorového prostoru V nazýváme **přímý** *nebo též* **direktní součet***, pokud $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$; píšeme pak $S \oplus T$.*

Tvrzení 3.3

Nechť S, T jsou lineární podprostory vektorového prostoru V. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

Součet lineárních podprostorů III

Přesněji, $S \cup T$ je lineární podprostor ve V právě tehdy, když $S \subseteq T$ nebo $T \subseteq S$.

Definice 5

Součet lineárních podprostorů S, T vektorového prostoru V nazýváme **přímý** *nebo též* **direktní součet**, *pokud $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$; píšeme pak $S \oplus T$.*

Tvrzení 3.3

Nechť S, T jsou lineární podprostory vektorového prostoru V. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) *$S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, tj. součet $S + T$ je direktní;*

Součet lineárních podprostorů III

Přesněji, $S \cup T$ je lineární podprostor ve V právě tehdy, když $S \subseteq T$ nebo $T \subseteq S$.

Definice 5

Součet lineárních podprostorů S, T vektorového prostoru V nazýváme **přímý** *nebo též* **direktní součet**, *pokud $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$; píšeme pak $S \oplus T$.*

Tvrzení 3.3

Nechť S, T jsou lineární podprostory vektorového prostoru V. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) *$S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, tj. součet $S + T$ je direktní;*

(ii) *každý vektor $\mathbf{z} \in S + T$ má jednoznačné vyjádření ve tvaru $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, kde $\mathbf{x} \in S$, $\mathbf{y} \in T$.*

Obsah

Lineární závislost I

Definice 6

Říkáme, že uspořádaná n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ *je* **lineárně závislá**, *pokud existují skaláry* $c_1, \ldots, c_n \in K$ *tak, že* $(c_1, \ldots, c_n) \neq \mathbf{0}$ *a* $c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$.

Lineární závislost I

Definice 6

Říkáme, že uspořádaná n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ *je* **lineárně závislá**, *pokud existují skaláry* $c_1, \dots, c_n \in K$ *tak, že* $(c_1, \dots, c_n) \neq \mathbf{0}$ *a* $c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$.
V opačném případě říkáme, že uspořádaná n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ *je* **lineárně nezávislá**.

Lineární závislost I

Definice 6

Říkáme, že uspořádaná n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ *je* **lineárně závislá**, *pokud existují skaláry* $c_1, \dots, c_n \in K$ *tak, že* $(c_1, \dots, c_n) \neq \mathbf{0}$ *a* $c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$.
V opačném případě říkáme, že uspořádaná n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ *je* **lineárně nezávislá**.

Pro $n = 0$ kvůli úplnosti dodávame, že uspořádanou 0**-tici** (tj. ***prázdnou posloupnost***) vektorů považujeme za lineárně nezávislou.

Lineární závislost I

Definice 6

Říkáme, že uspořádaná n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ *je* **lineárně závislá**, *pokud existují skaláry* $c_1, \dots, c_n \in K$ *tak, že* $(c_1, \dots, c_n) \neq \mathbf{0}$ *a* $c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$.
V opačném případě říkáme, že uspořádaná n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ *je* **lineárně nezávislá**.

Pro $n = 0$ kvůli úplnosti dodávame, že uspořádanou 0-**tici** (tj. ***prázdnou posloupnost***) vektorů považujeme za lineárně nezávislou.

Místo o "lineárně (ne)závislé uspořádané n-tici vektorů $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$" budeme často mluvit jen o lineárně (ne)závislých vektorech $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$.

Lineární závislost II

Podle definice lineární nezávislosti jsou vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ ***lineárně nezávislé*** právě tehdy, když

Lineární závislost II

Podle definice lineární nezávislosti jsou vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ ***lineárně nezávislé*** právě tehdy, když

$$(\forall\, c_1, \ldots, c_n \in K)$$
$$(c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; c_1 = \ldots = c_n = 0).$$

Lineární závislost II

Podle definice lineární nezávislosti jsou vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ ***lineárně nezávislé*** právě tehdy, když

$$(\forall\, c_1, \ldots, c_n \in K)$$
$$(c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; c_1 = \ldots = c_n = 0).$$

Pro n-tici skalárů $(c_1, \ldots, c_n) = \mathbf{0}$ platí

$$c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

pro libovolnou n-tici vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$, bez ohledu na to, zda je lineárně závislá nebo nezávislá.

Lineární závislost III

Pro některé n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ můžeme jako výsledek lineární kombinace $c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ dostat $\mathbf{0}$ i s pomocí ***jiné*** n-tice skalárů $(c_1, \ldots, c_n)$ než jen $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ – takovéto uspořádané n-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ nazýváme ***lineárně závislé***.

Lineární závislost III

Pro některé n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ můžeme jako výsledek lineární kombinace $c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ dostat $\mathbf{0}$ i s pomocí ***jiné*** n-tice skalárů $(c_1, \ldots, c_n)$ než jen $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ – takovéto uspořádané n-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ nazýváme ***lineárně závislé***.

Pro některé uspořádané n-tice vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je volba $(c_1, \ldots, c_n) = \mathbf{0}$ ***jediná možnost***, jak pomocí lineární kombinace $c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ získáme výsledek $\mathbf{0}$ – takovéto n-tice nazýváme ***lineárně nezávislé***.

Lineární závislost IV

Platí čtyři jednoduchá pozorování:

(a) jediný vektor $\mathbf{u}$ je lineárně nezávislý právě tehdy, když $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$;

Lineární závislost IV

Platí čtyři jednoduchá pozorování:

(a) jediný vektor $\mathbf{u}$ je lineárně nezávislý právě tehdy, když $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$;

(b) vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z nich je násobkem druhého;

Lineární závislost IV

Platí čtyři jednoduchá pozorování:

(a) jediný vektor $\mathbf{u}$ je lineárně nezávislý právě tehdy, když $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$;

(b) vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z nich je násobkem druhého;

(c) je-li některý z vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ roven $\mathbf{0}$, pak jsou tyto vektory lineárně závislé;

Lineární závislost IV

Platí čtyři jednoduchá pozorování:

(a) jediný vektor $\mathbf{u}$ je lineárně nezávislý právě tehdy, když $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$;

(b) vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z nich je násobkem druhého;

(c) je-li některý z vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ roven $\mathbf{0}$, pak jsou tyto vektory lineárně závislé;

(d) pokud se některé dva z vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ rovnají, pak jsou tyto vektory lineárně závislé.

Lineární závislost IV

Platí čtyři jednoduchá pozorování:

(a) jediný vektor $\mathbf{u}$ je lineárně nezávislý právě tehdy, když $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$;

(b) vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z nich je násobkem druhého;

(c) je-li některý z vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ roven $\mathbf{0}$, pak jsou tyto vektory lineárně závislé;

(d) pokud se některé dva z vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ rovnají, pak jsou tyto vektory lineárně závislé.

Jinak řečeno, pouze uspořádaná n-tice nenulových a navzájem různých vektorů, z kterých žádný není násobkem druhého, může (ale stále ještě nemusí) být lineárně nezávislá.

Lineární závislost V

Následující tabulka shrnuje vztah lineární závislosti vzhledem k relaci inkluze.

Lineární závislost V

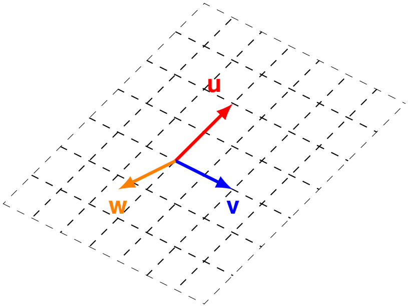
Následující tabulka shrnuje vztah lineární závislosti vzhledem k relaci inkluze.

	$S_1 \subseteq S$	$S_1 \supseteq S$
S nezávislá	S_1 bude nezávislá	S_1 může být oboje
S závislá	S_1 může být oboje	S_1 bude závislá

Lineární závislost V

Následující tabulka shrnuje vztah lineární závislosti vzhledem k relaci inkluze.

	$S_1 \subseteq S$	$S_1 \supseteq S$
S nezávislá	S_1 bude nezávislá	S_1 může být oboje
S závislá	S_1 může být oboje	S_1 bude závislá



Lineární závislost VI

Tvrzení 4.1

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) *vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně závislé;*

Lineární závislost VI

Tvrzení 4.1

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně závislé;

(ii) některý z vektorů $\mathbf{u}_k$, $k \leq n$, je lineární kombinací předcházejících;

Lineární závislost VI

Tvrzení 4.1

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

- *(i) vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně závislé;*
- *(ii) některý z vektorů $\mathbf{u}_k$, $k \leq n$, je lineární kombinací předcházejících;*
- *(ii') některý z vektorů $\mathbf{u}_k$, $k \leq n$, je lineární kombinací nasledujících;*

Lineární závislost VI

Tvrzení 4.1

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) *vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně závislé;*

(ii) *některý z vektorů $\mathbf{u}_k$, $k \leq n$, je lineární kombinací předcházejících;*

(ii') *některý z vektorů $\mathbf{u}_k$, $k \leq n$, je lineární kombinací nasledujících;*

(iii) *některý z vektorů $\mathbf{u}_k$, $k \leq n$, je lineární kombinace ostatních.*

Lineární závislost VI

Tvrzení 4.1

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (i) *vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně závislé;*
- (ii) *některý z vektorů $\mathbf{u}_k$, $k \leq n$, je lineární kombinací předcházejících;*
- (ii') *některý z vektorů $\mathbf{u}_k$, $k \leq n$, je lineární kombinací nasledujících;*
- (iii) *některý z vektorů $\mathbf{u}_k$, $k \leq n$, je lineární kombinace ostatních.*

Lineární závislost VII

Každý vektor $\mathbf{x}$ z lineárního obalu $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$$

pro nějakou n-tici skalárů $(c_1, \ldots, c_n)$.

Lineární závislost VII

Každý vektor $\mathbf{x}$ z lineárního obalu $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$$

pro nějakou n-tici skalárů $(c_1, \ldots, c_n)$.

Tvrzení 4.2

Vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když každý vektor $\mathbf{x} \in [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ můžeme vyjádřit ve tvaru $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ pro jedinou uspořádanou n-tici $(c_1, \ldots, c_n) \in K^n$.

Lineární závislost VIII

Nasledující tvrzení dává do souvislosti lineární (ne)závislost s lineárním obalem.

Tvrzení 4.3

Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v} \in V$*, přičemž vektory* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ *jsou lineárně nezávislé. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $\mathbf{v} \in [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$;

Lineární závislost VIII

Nasledující tvrzení dává do souvislosti lineární (ne)závislost s lineárním obalem.

Tvrzení 4.3

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v} \in V$*, přičemž vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *jsou lineárně nezávislé. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $\mathbf{v} \in [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$*;*

(ii) vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}$ *jsou lineárně závislé;*

Lineární závislost VIII

Nasledující tvrzení dává do souvislosti lineární (ne)závislost s lineárním obalem.

Tvrzení 4.3

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v} \in V$*, přičemž vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *jsou lineárně nezávislé. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $\mathbf{v} \in [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$;

(ii) vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}$ *jsou lineárně závislé;*

(iii) $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}] = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$.

Lineární závislost IX

Věta 4.4

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$, *přičemž vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *jsou lineárně nezávislé. Potom z množiny* $\{1, \ldots, m\}$ *můžeme vybrat indexy* $i_1 < \ldots < i_k$ *tak, že vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_{i_1}, \ldots, \mathbf{v}_{i_k}$ *jsou lineárně nezávislé a generují stejný podprostor jako vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$.

Lineární obal v prostorech K^m I

Použití téže metody úpravy matic pomocí ERO na (redukovaný) stupňovitý tvar na řešení následujících tří otázek:

Lineární obal v prostorech K^m I

Použití téže metody úpravy matic pomocí ERO na (redukovaný) stupňovitý tvar na řešení následujících tří otázek:

(1) rozhodnout pro dané vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y} \in K^m$, zda $\mathbf{y}$ patří nebo nepatří do lineárního obalu $[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$;

Lineární obal v prostorech K^m I

Použití téže metody úpravy matic pomocí ERO na (redukovaný) stupňovitý tvar na řešení následujících tří otázek:

(1) rozhodnout pro dané vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y} \in K^m$, zda $\mathbf{y}$ patří nebo nepatří do lineárního obalu $[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$;

(2) rozhodnout pro dané vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in K^m$, zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé;

Lineární obal v prostorech K^m I

Použití téže metody úpravy matic pomocí ERO na (redukovaný) stupňovitý tvar na řešení následujících tří otázek:

(1) rozhodnout pro dané vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y} \in K^m$, zda $\mathbf{y}$ patří nebo nepatří do lineárního obalu $[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$;

(2) rozhodnout pro dané vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in K^m$, zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé;

(3) vybrat z vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in K^m$ lineárně nezávislé vektory $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}$ ($j_1 < \ldots < j_k$) tak, aby vektory $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}$ generovaly v K^m stejný lineární podprostor jako vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Lineární obal v prostorech K^m I

Použití téže metody úpravy matic pomocí ERO na (redukovaný) stupňovitý tvar na řešení následujících tří otázek:

(1) rozhodnout pro dané vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y} \in K^m$, zda $\mathbf{y}$ patří nebo nepatří do lineárního obalu $[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$;

(2) rozhodnout pro dané vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in K^m$, zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé;

(3) vybrat z vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in K^m$ lineárně nezávislé vektory $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}$ ($j_1 < \ldots < j_k$) tak, aby vektory $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}$ generovaly v K^m stejný lineární podprostor jako vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Zavedeme dále označení, kterého sa budeme držet v celém odstavci.

Lineární obal v prostorech K^m II

Nechť $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y} \in K^m$ jsou sloupcové vektory, přičemž

$$\mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Lineární obal v prostorech K^m II

Nechť $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y} \in K^m$ jsou sloupcové vektory, přičemž

$$\mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Označme $\mathbf{X} = (x_{ij}) \in K^{m \times n}$ matici se sloupci $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, a $(\mathbf{X} \,|\, \mathbf{y}) \in K^{m \times (n+1)}$ blokovou matici složenou z matice $\mathbf{X}$ a vektoru $\mathbf{y}$.

Lineární obal v prostorech K^m III

Potom pro $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in K^n$ platí:

Lineární obal v prostorech K^m III

Potom pro $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in K^n$ platí:

(1) $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}$;

Lineární obal v prostorech K^m III

Potom pro $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \in K^n$ platí:

(1) $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}$;

(2) $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Lineární obal v prostorech K^m III

Potom pro $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in K^n$ platí:

(1) $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{X}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{y}$;

(2) $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{X}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Jinak řečeno:

(1) $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$ právě tehdy, když soustava $\mathbf{X}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{y}$ s rozšířenou maticí $(\mathbf{X}\,|\,\mathbf{y})$ má alespoň jedno řešení;

Lineární obal v prostorech K^m III

Potom pro $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in K^n$ platí:

(1) $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}$;

(2) $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Jinak řečeno:

(1) $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$ právě tehdy, když soustava $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}$ s rozšířenou maticí $(\mathbf{X} \,|\, \mathbf{y})$ má alespoň jedno řešení;

(2) vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když homogenní soustava $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$ má jediné řešení $\mathbf{c} = \mathbf{0}$; pokud tato soustava má i nějaké nenulové řešení, tak vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně závislé.

Lineární obal v prostorech K^m IV

Otázku (1) umíme řešit. Stačí pomocí ERO upravit matici $(\mathbf{X} \mid \mathbf{y})$ na stupňovitý tvar.

Lineární obal v prostorech K^m IV

Otázku (1) umíme řešit. Stačí pomocí ERO upravit matici $(\mathbf{X} \mid \mathbf{y})$ na stupňovitý tvar.

Pokud výsledná matice obsahuje řádek tvaru $(0, \ldots, 0 \mid z)$, kde $z \neq 0$, tak soustava $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}$ nemá řešení a $\mathbf{y} \notin [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$.

Lineární obal v prostorech K^m IV

Otázku (1) umíme řešit. Stačí pomocí ERO upravit matici $(\mathbf{X} \mid \mathbf{y})$ na stupňovitý tvar.

Pokud výsledná matice obsahuje řádek tvaru $(0, \ldots, 0 \mid z)$, kde $z \neq 0$, tak soustava $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}$ nemá řešení a $\mathbf{y} \notin [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$.

Pokud sa takovýto řádek ve výsledné matici nenachází, tak soustava má alespoň jedno řešení a $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$.

Lineární obal v prostorech K^m IV

Otázku (1) umíme řešit. Stačí pomocí ERO upravit matici $(\mathbf{X} \mid \mathbf{y})$ na stupňovitý tvar.

Pokud výsledná matice obsahuje řádek tvaru $(0, \ldots, 0 \mid z)$, kde $z \neq 0$, tak soustava $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}$ nemá řešení a $\mathbf{y} \notin [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$.

Pokud sa takovýto řádek ve výsledné matici nenachází, tak soustava má alespoň jedno řešení a $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$.

Podobně je tomu s otázkou (2). Opět stačí pomocí ERO upravit matici $\mathbf{X}$ na stupňovitý tvar a podívat se, zda v každém sloupci leží vedoucí prvek nějakého řádku.

Lineární obal v prostorech K^m IV

Otázku (1) umíme řešit. Stačí pomocí ERO upravit matici $(\mathbf{X}\,|\,\mathbf{y})$ na stupňovitý tvar.

Pokud výsledná matice obsahuje řádek tvaru $(0,\ldots,0\,|\,z)$, kde $z \neq 0$, tak soustava $\mathbf{X}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{y}$ nemá řešení a $\mathbf{y} \notin [\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n]$.

Pokud sa takovýto řádek ve výsledné matici nenachází, tak soustava má alespoň jedno řešení a $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n]$.

Podobně je tomu s otázkou (2). Opět stačí pomocí ERO upravit matici $\mathbf{X}$ na stupňovitý tvar a podívat se, zda v každém sloupci leží vedoucí prvek nějakého řádku.

Pokud tento případ nastane, nemáme možnost zvolit parametry, $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ je jediným řešením soustavy $\mathbf{X}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{0}$ a vektory $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ jsou lineárně nezávislé.

Lineární obal v prostorech K^m V

V opačném případě máme možnost volby alespoň jednoho parametru, soustava má tedy nějaké nenulové řešení a vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ jsou ***lineárně závislé***.

Lineární obal v prostorech K^m V

V opačném případě máme možnost volby alespoň jednoho parametru, soustava má tedy nějaké nenulové řešení a vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ jsou ***lineárně závislé***.

Vedoucím prvkem řádku $(0, \ldots, 0 \,|\, z)$, kde $z \neq 0$, je právě v $(n+1)$-ním sloupci ležící prvek z.

Lineární obal v prostorech K^m V

V opačném případě máme možnost volby alespoň jednoho parametru, soustava má tedy nějaké nenulové řešení a vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ jsou ***lineárně závislé***.

Vedoucím prvkem řádku $(0, \ldots, 0 \mid z)$, kde $z \neq 0$, je právě v $(n+1)$-ním sloupci ležící prvek z.

Tedy matice v stupňovitém tvaru, která je řádkově ekvivalentní s $(\mathbf{X} \mid \mathbf{y})$ neobsahuje takový řádek právě tehdy, když ***v jejím posledním sloupci neleží vedoucí prvek žádného řádku***.

Lineární obal v prostorech K^m VI

Příklad 4.5

Uvažme sloupcové vektory $\mathbf{x}_1 = (1, 1, -1, -1)^T$, $\mathbf{x}_2 = (0, 1, 0, 1)^T$, $\mathbf{x}_3 = (3, 1, -3, -5)^T$, $\mathbf{x}_4 = (0, 0, 1, 2)^T$, $\mathbf{y} = (3, 5, -2, 1)^T$, $\mathbf{z} = (1, 1, 1, 1)^T$ *v prostoru* $\mathbb{R}^4$.

Lineární obal v prostorech K^m VI

Příklad 4.5

Uvažme sloupcové vektory $\mathbf{x}_1 = (1, 1, -1, -1)^T$, $\mathbf{x}_2 = (0, 1, 0, 1)^T$, $\mathbf{x}_3 = (3, 1, -3, -5)^T$, $\mathbf{x}_4 = (0, 0, 1, 2)^T$, $\mathbf{y} = (3, 5, -2, 1)^T$, $\mathbf{z} = (1, 1, 1, 1)^T$ *v prostoru* $\mathbb{R}^4$.

Máme rozhodnout, zda vektory $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ *leží v lineárním obalu* $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4]$.

Lineární obal v prostorech K^m VI

Příklad 4.5

Uvažme sloupcové vektory $\mathbf{x}_1 = (1,1,-1,-1)^T$, $\mathbf{x}_2 = (0,1,0,1)^T$, $\mathbf{x}_3 = (3,1,-3,-5)^T$, $\mathbf{x}_4 = (0,0,1,2)^T$, $\mathbf{y} = (3,5,-2,1)^T$, $\mathbf{z} = (1,1,1,1)^T$ *v prostoru* $\mathbb{R}^4$.

Máme rozhodnout, zda vektory $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ *leží v lineárním obalu* $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4]$.

Označme si následující matice

$$(\mathbf{X} \mid \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right), \quad (\mathbf{X} \mid \mathbf{z}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Lineární obal v prostorech K^m VI

Matice $(\mathbf{X} \mid \mathbf{y})$, $(\mathbf{X} \mid \mathbf{z})$ jsou řádkově ekvivalentní s maticemi

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ resp. } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Lineární obal v prostorech K^m VI

Matice $(\mathbf{X} \,|\, \mathbf{y})$, $(\mathbf{X} \,|\, \mathbf{z})$ jsou řádkově ekvivalentní s maticemi

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ resp. } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Lineární obal v prostorech K^m VI

Matice $(\mathbf{X} \,|\, \mathbf{y})$, $(\mathbf{X} \,|\, \mathbf{z})$ jsou řádkově ekvivalentní s maticemi

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ resp. } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Okamžitě vidíme, že platí $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4]$ a $\mathbf{z} \notin [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4]$.

Lineární obal v prostorech K^m VI

Příklad 4.6

Zjistíme, zda sloupce reálné matice

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

jsou lineárně závislé nebo nezávislé. Tato matice je řádkově ekvivalentní s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že sloupce matice $\mathbf{X}$ *jsou lineárně nezávislé.*

Lineární obal v prostorech K^m VII

Z druhé strany, $\mathbf{X}$ jakožto matice nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ je řádkově ekvivalentní s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lineární obal v prostorech K^m VII

Z druhé strany, **X** jakožto matice nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ je řádkově ekvivalentní s maticí

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 4 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy sloupce matice **X**, chápané jakožto vektory z vektorového prostoru $\mathbb{Z}_5^4$, jsou lineárně závislé.

Lineární obal v prostorech K^m VIII

Tvrzení 4.7

Nechť $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in K^{m \times n}$ *jsou řádkově ekvivalentní matice, přičemž matice* $\mathbf{Y}$ *je ve stupňovitém tvaru. Pro* $1 \leq j \leq n$ *označme* $\mathbf{x}_j = \mathbf{s}_j(\mathbf{X})$ *j-tý sloupec matice* $\mathbf{X}$*. Nechť* $j_1 < \ldots < j_k$ *jsou indexy všech sloupců matice* $\mathbf{Y}$*, ve kterých leží vedoucí prvky jejich řádků. Potom platí:*

(a) vektory $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}$ jsou lineárně nezávislé;

Lineární obal v prostorech K^m VIII

Tvrzení 4.7

Nechť $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in K^{m \times n}$ *jsou řádkově ekvivalentní matice, přičemž matice* $\mathbf{Y}$ *je ve stupňovitém tvaru. Pro* $1 \leq j \leq n$ *označme* $\mathbf{x}_j = \mathbf{s}_j(\mathbf{X})$ *j-tý sloupec matice* $\mathbf{X}$. *Nechť* $j_1 < \ldots < j_k$ *jsou indexy všech sloupců matice* $\mathbf{Y}$, *ve kterých leží vedoucí prvky jejich řádků. Potom platí:*

(a) vektory $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}$ jsou lineárně nezávislé*;*

(b) pokud v j-tém sloupci matice $\mathbf{Y}$ neleží vedoucí prvek žádného jejího řádku (t. j. $1 \leq j \leq n$ a $j \neq j_1, \ldots, j_k$), tak vektor $\mathbf{x}_j$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_l}$, kde $l \leq k$ je největší index, pro který platí $j_l < j$;

Lineární obal v prostorech K^m VIII

Tvrzení 4.7

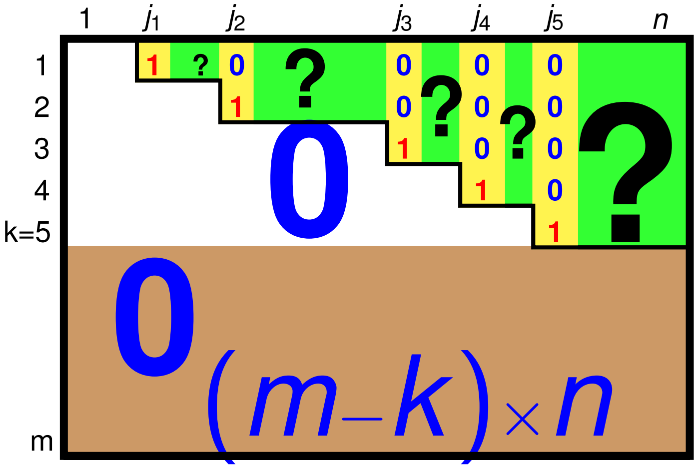
Nechť $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in K^{m\times n}$ jsou řádkově ekvivalentní matice, přičemž matice $\mathbf{Y}$ je ve stupňovitém tvaru. Pro $1 \leq j \leq n$ označme $\mathbf{x}_j = \mathbf{s}_j(\mathbf{X})$ j-tý sloupec matice $\mathbf{X}$. Nechť $j_1 < \ldots < j_k$ jsou indexy všech sloupců matice $\mathbf{Y}$, ve kterých leží vedoucí prvky jejich řádků. Potom platí:

(a) vektory $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}$ jsou lineárně nezávislé;

(b) pokud v j-tém sloupci matice $\mathbf{Y}$ neleží vedoucí prvek žádného jejího řádku (t. j. $1 \leq j \leq n$ a $j \neq j_1, \ldots, j_k$), tak vektor $\mathbf{x}_j$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_l}$, kde $l \leq k$ je největší index, pro který platí $j_l < j$;

(c) $[\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}] = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$.

Lineární obal v prostorech K^m IX



Redukovaný stupňovitý tvar

Lineární obal v prostorech K^m X

Výše uvedené tvrzení nám dáva přímý návod na řešení otázky (3).

Lineární obal v prostorech K^m X

Výše uvedené tvrzení nám dáva přímý návod na řešení otázky (3).

Stačí pomocí ERO upravit matici $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ na matici $\mathbf{Y}$ v stupňovitém tvaru a zjistit v ní indexy $j_1 < \dots < j_k$ všech sloupců, ve kterých leží vedoucí prvky jejich řádků.

Lineární obal v prostorech K^m X

Výše uvedené tvrzení nám dáva přímý návod na řešení otázky (3).

Stačí pomocí ERO upravit matici $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ na matici $\mathbf{Y}$ v stupňovitém tvaru a zjistit v ní indexy $j_1 < \ldots < j_k$ všech sloupců, ve kterých leží vedoucí prvky jejich řádků.

Potom $\mathbf{x}_{j_1}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}$ jsou hledané lineární nezávislé vektory, které generují lineární podprostor $[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$.

Lineární obal v prostorech K^m XI

Příklad 4.8

Ze sloupců reálné matice

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

je třeba vybrat lineární nezávislé sloupce, které generují lineární obal všech sloupců matice $\mathbf{X}$.

Lineární obal v prostorech K^m XI

Příklad 4.8

Ze sloupců reálné matice

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

je třeba vybrat lineární nezávislé sloupce, které generují lineární obal všech sloupců matice **X**.

Matice **X** *je řádkově ekvivalentní s maticí*

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lineární obal v prostorech K^m XII

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je ve stupňovitém tvaru.

Lineární obal v prostorech K^m XII

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je ve stupňovitém tvaru. Vedoucí prvky řádků matice **Y** se nachází ve sloupcích 1, 2 a 4.

Lineární obal v prostorech K^m XII

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je ve stupňovitém tvaru. Vedoucí prvky řádků matice **Y** se nachází ve sloupcích 1, 2 a 4.

Hledané vektory jsou tedy sloupce 1, 2 a 4 matice **X**.

Lineární obal v prostorech K^m XII

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je ve stupňovitém tvaru. Vedoucí prvky řádků matice **Y** se nachází ve sloupcích 1, 2 a 4.

Hledané vektory jsou tedy sloupce 1, 2 a 4 matice **X**. Zapsané vedle sebe pak tvoří matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lineární obal v prostorech K^m XIII

Poznámka. Výše uvedený postup řešení otázek (1), (2) a (3) pro prostory sloupcových vektorů K^m lze modifikovat na prostory řádkových vektorů K^m – např. transponováním příslušných matic řádkových vektorů nebo nahrazením elementárních řádkových operací sloupcovými.

Lineárně nezávislé posloupnosti I

Nekonečnou posloupnost $(\mathbf{u}_k)_{k=0}^{\infty} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \dots)$ vektorů z prostoru V nazýváme ***lineárně nezávislou***, pokud každá její konečná podposloupnost $(\mathbf{u}_{k_1}, \dots, \mathbf{u}_{k_n})$, kde $0 \leq k_1 < \dots < k_n$, je lineárně nezávislá.

Lineárně nezávislé posloupnosti I

Nekonečnou posloupnost $(\mathbf{u}_k)_{k=0}^{\infty} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \dots)$ vektorů z prostoru V nazýváme ***lineárně nezávislou***, pokud každá její konečná podposloupnost $(\mathbf{u}_{k_1}, \dots, \mathbf{u}_{k_n})$, kde $0 \leq k_1 < \dots < k_n$, je lineárně nezávislá.

Tvrzení 4.9

Nekonečná posloupnost $(\mathbf{u}_k)_{k=0}^{\infty}$ *vektorů z* V *je lineárně nezávislá právě tehdy, když pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je její počáteční úsek* $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ *lineárně nezávislý.*

Lineárně nezávislé posloupnosti I

Nekonečnou posloupnost $(\mathbf{u}_k)_{k=0}^{\infty} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \dots)$ vektorů z prostoru V nazýváme ***lineárně nezávislou***, pokud každá její konečná podposloupnost $(\mathbf{u}_{k_1}, \dots, \mathbf{u}_{k_n})$, kde $0 \leq k_1 < \dots < k_n$, je lineárně nezávislá.

Tvrzení 4.9

Nekonečná posloupnost $(\mathbf{u}_k)_{k=0}^{\infty}$ *vektorů z* V *je lineárně nezávislá právě tehdy, když pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je její počáteční úsek* $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ *lineárně nezávislý.*

Například posloupnost $(1, x, x^2, \dots, x^k, \dots)$ všech mocnin x je lineárně nezávislá posloupnost ve vektorovém prostoru $K[x]$ všech polynomů v proměnné x nad tělesem K.
Polynom $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ je (definitoricky) nulový právě tehdy, když $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$.

Lineárně nezávislé posloupnosti II

Množina $X \subseteq V$ sa nazývá ***lineárně nezávislá***, pokud pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ každá uspořádaná n-tice ***navzájem různých*** vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ z množiny X je lineárně nezávislá.

Lineárně nezávislé posloupnosti II

Množina $X \subseteq V$ sa nazývá ***lineárně nezávislá***, pokud pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ každá uspořádaná n-tice ***navzájem různých*** vektorů $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ z množiny X je lineárně nezávislá.

Kdyby totiž $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ nebyly navzájem různé vektory, nemohly by být lineárně nezávislé.

Lineárně nezávislé posloupnosti II

Množina $X \subseteq V$ sa nazývá ***lineárně nezávislá***, pokud pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ každá uspořádaná n-tice ***navzájem různých*** vektorů $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ z množiny X je lineárně nezávislá.

Kdyby totiž $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ nebyly navzájem různé vektory, nemohly by být lineárně nezávislé.

Lineární závislost či nezávislost uspořádané n-tice vektorů nezávisí na jejich pořadí.

Lineárně nezávislé posloupnosti II

Množina $X \subseteq V$ sa nazývá ***lineárně nezávislá***, pokud pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ každá uspořádaná n-tice ***navzájem různých*** vektorů $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ z množiny X je lineárně nezávislá.

Kdyby totiž $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ nebyly navzájem různé vektory, nemohly by být lineárně nezávislé.

Lineární závislost či nezávislost uspořádané n-tice vektorů nezávisí na jejich pořadí.

Zřejmě uspořádaná n-tice $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když je lineárně nezávislá uspořádaná n-tice $(\mathbf{u}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{u}_{\sigma(n)})$, kde σ je libovolná permutace množiny $\{1, \dots, n\}$.

Lineárně nezávislé posloupnosti III

Lineární (ne)závislost uspořádané n-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ navzájem různých vektorů je vlastností množiny $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$.

Lineárně nezávislé posloupnosti III

Lineární (ne)závislost uspořádané n-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ navzájem různých vektorů je vlastností množiny $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$.

Tvrzení 4.10

Uspořádaná n-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ navzájem různých vektorů z V je lineárně nezávislá právě tehdy, když množina $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subseteq V$ je lineárně nezávislá.

Lineárně nezávislé posloupnosti III

Lineární (ne)závislost uspořádané n-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ navzájem různých vektorů je vlastností množiny $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$.

Tvrzení 4.10

Uspořádaná n-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ *navzájem různých vektorů z* V *je lineárně nezávislá právě tehdy, když množina* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subseteq V$ *je lineárně nezávislá.*

Tvrzení 4.11

Nechť $X \subseteq V$ *je lineárně nezávislá množina a* $\mathbf{v} \in V$. *Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $\mathbf{v} \in [X]$;

Lineárně nezávislé posloupnosti III

Lineární (ne)závislost uspořádané n-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ navzájem různých vektorů je vlastností množiny $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$.

Tvrzení 4.10

Uspořádaná n-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ *navzájem různých vektorů z* V *je lineárně nezávislá právě tehdy, když množina* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subseteq V$ *je lineárně nezávislá.*

Tvrzení 4.11

Nechť $X \subseteq V$ *je lineárně nezávislá množina a* $\mathbf{v} \in V$*. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $\mathbf{v} \in [X]$;

(ii) *množina* $X \cup \{\mathbf{v}\}$ *je lineárně závislá;*

Lineárně nezávislé posloupnosti III

Lineární (ne)závislost uspořádané n-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ navzájem různých vektorů je vlastností množiny $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$.

Tvrzení 4.10

Uspořádaná n-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ *navzájem různých vektorů z* V *je lineárně nezávislá právě tehdy, když množina* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subseteq V$ *je lineárně nezávislá.*

Tvrzení 4.11

Nechť $X \subseteq V$ *je lineárně nezávislá množina a* $\mathbf{v} \in V$*. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $\mathbf{v} \in [X]$;

(ii) množina $X \cup \{\mathbf{v}\}$ *je lineárně závislá;*

(iii) $[X \cup \{\mathbf{v}\}] = [X]$.

Lineárně nezávislé posloupnosti III

Lineární (ne)závislost uspořádané n-tice $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ navzájem různých vektorů je vlastností množiny $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$.

Tvrzení 4.10

Uspořádaná n-tice $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ *navzájem různých vektorů z* V *je lineárně nezávislá právě tehdy, když množina* $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subseteq V$ *je lineárně nezávislá.*

Tvrzení 4.11

Nechť $X \subseteq V$ *je lineárně nezávislá množina a* $\mathbf{v} \in V$*. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $\mathbf{v} \in [X]$;

(ii) množina $X \cup \{\mathbf{v}\}$ *je lineárně závislá;*

(iii) $[X \cup \{\mathbf{v}\}] = [X]$.

Obsah

Steinitzova věta I

Věta 5.1 (Steinitzova věta)

Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in V$. *Jsou-li vektory* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ *lineárně nezávislé a všechny patří do lineárního obalu* $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m]$, *pak* $n \leq m$.

Steinitzova věta I

Věta 5.1 (Steinitzova věta)

Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$. *Jsou-li vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *lineárně nezávislé a všechny patří do lineárního obalu* $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m]$, *pak* $n \leq m$.

Tvrzení 5.2

Pro libovolný vektorový prostor V *jsou nasledující podmínky ekvivalentní:*

(i) *existuje konečná množina* $X \subseteq V$ *tak, že* $[X] = V$;

Steinitzova věta I

Věta 5.1 (Steinitzova věta)

Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in V$. *Jsou-li vektory* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ *lineárně nezávislé a všechny patří do lineárního obalu* $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m]$, *pak* $n \leq m$.

Tvrzení 5.2

Pro libovolný vektorový prostor V *jsou nasledující podmínky ekvivalentní:*

(i) *existuje konečná množina* $X \subseteq V$ *tak, že* $[X] = V$;

(ii) *každá lineárně nezávislá množina* $Y \subseteq V$ *je konečná.*

Steinitzova věta II

Říkáme, že vektorový prostor V je ***konečně rozměrný*** (***konečně dimenzionální***), pokud splňuje některou (tedy nutně obě) z ekvivalentních podmínek (i), (ii) právě dokázaného tvrzení.

Steinitzova věta II

Říkáme, že vektorový prostor V je ***konečně rozměrný*** (***konečně dimenzionální***), pokud splňuje některou (tedy nutně obě) z ekvivalentních podmínek (i), (ii) právě dokázaného tvrzení.

V opačném případě říkáme, že V je ***nekonečně rozměrný*** (***nekonečně dimenzionální***) vektorový prostor.

Báze a dimenze I

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor.

Báze a dimenze I

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor.

Bází prostoru V nazýváme každou lineárně nezávislou uspořádanou n-tici $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ vektorů z V, která generuje celý prostor V.

Báze a dimenze I

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor.

Bází prostoru V nazýváme každou lineárně nezávislou uspořádanou n-tici $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ vektorů z V, která generuje celý prostor V.

Říkáme pak, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ ***tvoří bázi*** prostoru V.

Báze a dimenze I

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor.

Bází prostoru V nazýváme každou lineárně nezávislou uspořádanou n-tici $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ vektorů z V, která generuje celý prostor V.

Říkáme pak, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ ***tvoří bázi*** prostoru V.

Tvrzení 5.3

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

(a) *libovolnou lineárně nezávislou uspořádanou k-tici $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ vektorů z V můžeme doplnit do nějaké báze $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \ldots, \mathbf{u}_n)$ prostoru V;*

(b) *z libovolné generující uspořádané m-tice $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$ vektorů z V můžeme vybrat nějakou bázi $(\mathbf{v}_{i_1}, \ldots, \mathbf{v}_{i_n})$ prostoru V.*

Báze a dimenze II

Věta 5.4

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

(a) *V má alespoň jednu bázi;*

Báze a dimenze II

Věta 5.4

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

(a) *V má alespoň jednu bázi;*

(b) *libovolné dvě báze prostoru V mají stejný počet prvků.*

Báze a dimenze II

Věta 5.4

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

(a) *V má alespoň jednu bázi;*

(b) *libovolné dvě báze prostoru V mají stejný počet prvků.*

Právě dokázaná věta nám umožňuje korektně definovat ***dimenzi*** nebo též ***rozměr*** konečně rozměrného vektorového prostoru V jako počet prvků jeho libovolné báze.

Báze a dimenze II

Věta 5.4

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

(a) *V má alespoň jednu bázi;*

(b) *libovolné dvě báze prostoru V mají stejný počet prvků.*

Právě dokázaná věta nám umožňuje korektně definovat ***dimenzi*** nebo též ***rozměr*** konečně rozměrného vektorového prostoru V jako počet prvků jeho libovolné báze.

Dimenzi vektorového prostoru V značíme $\dim V$.

Báze a dimenze II

Věta 5.4

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

(a) *V má alespoň jednu bázi;*

(b) *libovolné dvě báze prostoru V mají stejný počet prvků.*

Právě dokázaná věta nám umožňuje korektně definovat ***dimenzi*** nebo též ***rozměr*** konečně rozměrného vektorového prostoru V jako počet prvků jeho libovolné báze.

Dimenzi vektorového prostoru V značíme $\dim V$.

Pokud $\dim V = n$, říkáme, že V je ***n-rozměrný*** vektorový prostor.

Báze a dimenze II

Věta 5.4

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom

(a) *V má alespoň jednu bázi;*

(b) *libovolné dvě báze prostoru V mají stejný počet prvků.*

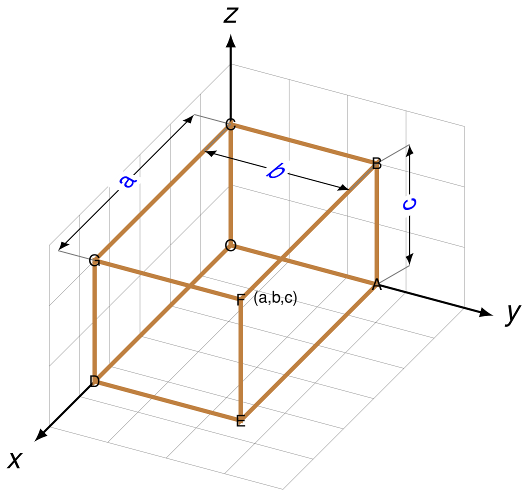
Právě dokázaná věta nám umožňuje korektně definovat ***dimenzi*** nebo též ***rozměr*** konečně rozměrného vektorového prostoru V jako počet prvků jeho libovolné báze.

Dimenzi vektorového prostoru V značíme $\dim V$.

Pokud $\dim V = n$, říkáme, že V je ***n-rozměrný*** vektorový prostor.

Pokud V je nekonečně rozměrný prostor, klademe $\dim V = \infty$.

Báze a dimenze III



Báze a dimenze IV

V případě, že bude potřebné zdůraznit úlohu (číselného) tělesa K, budeme používat podrobnější označení $\dim_K V$.

Báze a dimenze IV

V případě, že bude potřebné zdůraznit úlohu (číselného) tělesa K, budeme používat podrobnější označení $\dim_K V$.

Tedy V je konečně rozměrný právě tehdy, když $\dim V < \infty$.

Báze a dimenze IV

V případě, že bude potřebné zdůraznit úlohu (číselného) tělesa K, budeme používat podrobnější označení $\dim_K V$.

Tedy V je konečně rozměrný právě tehdy, když $\dim V < \infty$.

Tvrzení 5.5

Nechť $\dim V = n$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$. *Potom libovolné dvě z následujících podmínek implikují třetí:*

(i) *vektory* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ *jsou lineárně nezávislé;*

Báze a dimenze IV

V případě, že bude potřebné zdůraznit úlohu (číselného) tělesa K, budeme používat podrobnější označení $\dim_K V$.

Tedy V je konečně rozměrný právě tehdy, když $\dim V < \infty$.

Tvrzení 5.5

Nechť $\dim V = n$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$. Potom libovolné dvě z následujících podmínek implikují třetí:

(i) *vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ jsou lineárně nezávislé;*

(ii) *$[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m] = V$;*

Báze a dimenze IV

V případě, že bude potřebné zdůraznit úlohu (číselného) tělesa K, budeme používat podrobnější označení $\dim_K V$.

Tedy V je konečně rozměrný právě tehdy, když $\dim V < \infty$.

Tvrzení 5.5

Nechť $\dim V = n$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$. Potom libovolné dvě z následujících podmínek implikují třetí:

(i) *vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ jsou lineárně nezávislé;*

(ii) $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m] = V$;

(iii) $m = n$.

Báze a dimenze IV

V případě, že bude potřebné zdůraznit úlohu (číselného) tělesa K, budeme používat podrobnější označení $\dim_K V$.

Tedy V je konečně rozměrný právě tehdy, když $\dim V < \infty$.

Tvrzení 5.5

Nechť $\dim V = n$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$. Potom libovolné dvě z následujících podmínek implikují třetí:

(i) vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ jsou lineárně nezávislé;

(ii) $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m] = V$;

(iii) $m = n$.

To kromě jiného znamená, že na ověření, zda n vektorů $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ tvoří bázi n-rozměrného vektorového prostoru V, stačí ověřit jen jednu (a to libovolnou) z podmínek (i), (ii).

Jednoznačnost vyjádření vzhledem na danou bázi I

Následující věta je speciálním případem věty z předchozí kapitoly o lineární nezávislosti.

Jednoznačnost vyjádření vzhledem na danou bázi I

Následující věta je speciálním případem věty z předchozí kapitoly o lineární nezávislosti.

Věta 5.6

Vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *tvoří bázi vektorového prostoru* V *právě tehdy, když každý vektor* $\mathbf{x} \in V$ *můžeme jednoznačně vyjádřit ve tvaru lineární kombinace* $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$.

Jednoznačnost vyjádření vzhledem na danou bázi I

Následující věta je speciálním případem věty z předchozí kapitoly o lineární nezávislosti.

Věta 5.6

Vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *tvoří bázi vektorového prostoru* V *právě tehdy, když každý vektor* $\mathbf{x} \in V$ *můžeme jednoznačně vyjádřit ve tvaru lineární kombinace* $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$.

Existence aspoň jednoho vyjádření $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ je ekvivalentní s podmínkou, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ generují V.

Jednoznačnost vyjádření vzhledem na danou bázi I

Následující věta je speciálním případem věty z předchozí kapitoly o lineární nezávislosti.

Věta 5.6

Vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ tvoří bázi vektorového prostoru V právě tehdy, když každý vektor $\mathbf{x} \in V$ můžeme jednoznačně vyjádřit ve tvaru lineární kombinace $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$.

Existence aspoň jednoho vyjádření $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ je ekvivalentní s podmínkou, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ generují V.

Jednoznačnost tohoto vyjádření je zase ekvivalentní s lineární nezávislostí vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$.

Jednoznačnost vyjádření vzhledem na danou bázi II

Tedy $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je bází V tehdy a jen tehdy, když pro každé $\mathbf{x} \in V$ existuje právě jedno $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in K^n$ tak, že

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \alpha \cdot \mathbf{c}.$$

Jednoznačnost vyjádření vzhledem na danou bázi II

Tedy $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je bází V tehdy a jen tehdy, když pro každé $\mathbf{x} \in V$ existuje právě jedno $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in K^n$ tak, že

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \alpha \cdot \mathbf{c}.$$

Uvědomme si, že

$$\mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{c}$$

Jednoznačnost vyjádření vzhledem na danou bázi II

Tedy $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je bází V tehdy a jen tehdy, když pro každé $\mathbf{x} \in V$ existuje právě jedno $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in K^n$ tak, že

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \alpha \cdot \mathbf{c}.$$

Uvědomme si, že

$$\mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Tento jednoznačně určený sloupcový vektor $\mathbf{c} \in K^n$ budeme nazývat ***souřadnice vektoru*** $\mathbf{x}$ ***vzhledem na bázi*** α

Jednoznačnost vyjádření vzhledem na danou bázi II

Tedy $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je bází V tehdy a jen tehdy, když pro každé $\mathbf{x} \in V$ existuje právě jedno $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in K^n$ tak, že

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \alpha \cdot \mathbf{c}.$$

Uvědomme si, že

$$\mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Tento jednoznačně určený sloupcový vektor $\mathbf{c} \in K^n$ budeme nazývat ***souřadnice vektoru*** $\mathbf{x}$ ***vzhledem na bázi*** α a označovat

$$\mathbf{c} = (\mathbf{x})_\alpha.$$

Souřadnicové zobrazení I

Tedy každá báze α v n-rozměrném vektorovém prostoru V definuje ***souřadnicové zobrazení*** $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\alpha$ z V do sloupcového vektorového prostoru K^n.

Souřadnicové zobrazení I

Tedy každá báze α v n-rozměrném vektorovém prostoru V definuje ***souřadnicové zobrazení*** $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\alpha$ z V do sloupcového vektorového prostoru K^n.

Tvrzení 5.7

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je báze konečně rozměrného vektorového prostoru V.

Souřadnicové zobrazení I

Tedy každá báze α v n-rozměrném vektorovém prostoru V definuje ***souřadnicové zobrazení*** $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\alpha$ z V do sloupcového vektorového prostoru K^n.

Tvrzení 5.7

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je báze konečně rozměrného vektorového prostoru V.

Potom příslušné souřadnicové zobrazení $(-)_\alpha : V \to K^n$ je bijektivní a zachovává lineární kombinace,

Souřadnicové zobrazení I

Tedy každá báze α v n-rozměrném vektorovém prostoru V definuje ***souřadnicové zobrazení*** $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\alpha$ z V do sloupcového vektorového prostoru K^n.

Tvrzení 5.7

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je báze konečně rozměrného vektorového prostoru V.

Potom příslušné souřadnicové zobrazení $(-)_\alpha : V \to K^n$ je bijektivní a zachovává lineární kombinace,

tj. pro libovolná $a, b \in K$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí

$$(a\mathbf{x} + b\mathbf{y})_\alpha = a(\mathbf{x})_\alpha + b(\mathbf{y})_\alpha .$$

Souřadnicové zobrazení I

Tedy každá báze α v n-rozměrném vektorovém prostoru V definuje ***souřadnicové zobrazení*** $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\alpha$ z V do sloupcového vektorového prostoru K^n.

Tvrzení 5.7

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je báze konečně rozměrného vektorového prostoru V.

Potom příslušné souřadnicové zobrazení $(-)_\alpha : V \to K^n$ je bijektivní a zachovává lineární kombinace,

tj. pro libovolná $a, b \in K$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí

$$(a\mathbf{x} + b\mathbf{y})_\alpha = a(\mathbf{x})_\alpha + b(\mathbf{y})_\alpha.$$

K němu inverzní zobrazení $(-)_\alpha^{-1} : K^n \to V$ je dané předpisem $\mathbf{c} \mapsto \alpha \cdot \mathbf{c}$.

Souřadnicové zobrazení II

Zejména tedy pro libovolné $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{c} \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}}, \qquad (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c})_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{c}.$$

Souřadnicové zobrazení II

Zejména tedy pro libovolné $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{c} \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}}, \qquad (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c})_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{c}.$$

První rovnost ukazuje, jak je možno vektor $\mathbf{x}$ zrekonstruovat z dané báze $\boldsymbol{\alpha}$ a jeho souřadnic $(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}}$ v této bázi;

Souřadnicové zobrazení II

Zejména tedy pro libovolné $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{c} \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = \alpha \cdot (\mathbf{x})_\alpha, \qquad (\alpha \cdot \mathbf{c})_\alpha = \mathbf{c}.$$

První rovnost ukazuje, jak je možno vektor $\mathbf{x}$ zrekonstruovat z dané báze α a jeho souřadnic $(\mathbf{x})_\alpha$ v této bázi;

druhá, že souřadnice lineární kombinace $\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i = \alpha \cdot \mathbf{c}$ v bázi $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ tvoří právě vektor $(c_1, \dots, c_n)^T$.

Souřadnicové zobrazení II

Zejména tedy pro libovolné $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{c} \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = \alpha \cdot (\mathbf{x})_\alpha, \qquad (\alpha \cdot \mathbf{c})_\alpha = \mathbf{c}.$$

První rovnost ukazuje, jak je možno vektor $\mathbf{x}$ zrekonstruovat z dané báze α a jeho souřadnic $(\mathbf{x})_\alpha$ v této bázi;

druhá, že souřadnice lineární kombinace $\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i = \alpha \cdot \mathbf{c}$ v bázi $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ tvoří právě vektor $(c_1, \dots, c_n)^T$.

Takto zavedené souřadnice můžeme nazvat ***sloupcovými souřadnicemi*** vzhledem k dané bázi.

Souřadnicové zobrazení II

Zejména tedy pro libovolné $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{c} \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = \alpha \cdot (\mathbf{x})_\alpha, \qquad (\alpha \cdot \mathbf{c})_\alpha = \mathbf{c}.$$

První rovnost ukazuje, jak je možno vektor $\mathbf{x}$ zrekonstruovat z dané báze α a jeho souřadnic $(\mathbf{x})_\alpha$ v této bázi;

druhá, že souřadnice lineární kombinace $\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i = \alpha \cdot \mathbf{c}$ v bázi $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ tvoří právě vektor $(c_1, \ldots, c_n)^T$.

Takto zavedené souřadnice můžeme nazvat ***sloupcovými souřadnicemi*** vzhledem k dané bázi.

Podobným způsobem můžeme zavést i ***řádkové souřadnice*** a dokázat pro ně analogická tvrzení jako pro sloupcové.

Kanonická báze I

Příklad 5.8

Označme $\mathbf{e}_i^{(n)} = \mathbf{s}_i(\mathbf{I}_n) \in K^n$ *sloupcový vektor skládající ze samých nul, mimo* i*-té složky, která je 1.*

Kanonická báze I

Příklad 5.8

Označme $\mathbf{e}_i^{(n)} = \mathbf{s}_i(\mathbf{I}_n) \in K^n$ *sloupcový vektor skládající ze samých nul, mimo i-té složky, která je 1.*

Potom $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{e}_n^{(n)})$ *je báze sloupcového vektorového prostoru* K^n.

Kanonická báze I

Příklad 5.8

Označme $\mathbf{e}_i^{(n)} = \mathbf{s}_i(\mathbf{I}_n) \in K^n$ *sloupcový vektor skládající ze samých nul, mimo* i*-té složky, která je 1.*

Potom $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1^{(n)}, \ldots, \mathbf{e}_n^{(n)})$ *je báze sloupcového vektorového prostoru* K^n.

Nazýváme ji **kanonickou bází** *tohoto prostoru. Můžeme ji ztotožnit s jednotkovou maticí* $\mathbf{I}_n$.

Kanonická báze I

Příklad 5.8

Označme $\mathbf{e}_i^{(n)} = \mathbf{s}_i(\mathbf{I}_n) \in K^n$ *sloupcový vektor skládající ze samých nul, mimo i-té složky, která je 1.*

Potom $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{e}_n^{(n)})$ *je báze sloupcového vektorového prostoru* K^n.

Nazýváme ji **kanonickou bází** *tohoto prostoru. Můžeme ji ztotožnit s jednotkovou maticí* $\mathbf{I}_n$.

Občas budeme horní index (n) vynechávat a příslušnou bázi označovat stručně $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

Kanonická báze II

Pro libovolný vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n,$$

proto $(\mathbf{x})_\varepsilon = \mathbf{x}$,

Kanonická báze II

Pro libovolný vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n,$$

proto $(\mathbf{x})_\varepsilon = \mathbf{x}$,

tj. každý vektor $\mathbf{x} \in K^n$ splýva se svými vlastními souřadnicemi v kanonické bázi.

Kanonická báze II

Pro libovolný vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n,$$

proto $(\mathbf{x})_\varepsilon = \mathbf{x}$,

tj. každý vektor $\mathbf{x} \in K^n$ splýva se svými vlastními souřadnicemi v kanonické bázi.

Kanonická báze řádkového vektorového prostoru K^n je tvořená řádky jednotkové matice $\mathbf{I}_n$ a značíme ji stejně jako v předcházejícím případě $\varepsilon^{(n)} = \left(\mathbf{e}_1^{(n)}, \ldots, \mathbf{e}_n^{(n)}\right)^T$ nebo stručně $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)^T$, s tím rozdílem, že $\varepsilon^{(n)} = \varepsilon$ je sloupec vektorů a každé $\mathbf{e}_i$ je řádek skládající se ze samých nul, mimo i-té pozice, na které je 1.

Kanonická báze III

Věta 5.9

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ *platí* $\dim K^n = n$.

Kanonická báze III

Věta 5.9

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ *platí* $\dim K^n = n$.

Příklad 5.10

Sloupce matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tvoří bázi α *sloupcového vektorového prostoru* K^4.

Kanonická báze IV

Souřadnice vektoru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in K^n$ v bázi α jsou dané vztahem

$$(x)_\alpha = (x_4, x_3 - x_4, x_2 - x_3, x_1 - x_2)^T.$$

Kanonická báze IV

Souřadnice vektoru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in K^n$ v bázi $\boldsymbol{\alpha}$ jsou dané vztahem

$$(x)_{\boldsymbol{\alpha}} = (x_4, x_3 - x_4, x_2 - x_3, x_1 - x_2)^T.$$

Platí totiž

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x_3 - x_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_2 - x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kanonická báze V

Příklad 5.11

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. *Pro libovolné* $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$ *označme* $\mathbf{E}_{kl}^{(m,n)} = \mathbf{E}_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{m \times n}$ *matici typu* $m \times n$ *nad tělesem* K*, která sestává ze samých nul, kromě pozice* (k, l)*, na které je 1.*

Kanonická báze V

Příklad 5.11

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. *Pro libovolné* $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$ *označme* $\mathbf{E}_{kl}^{(m,n)} = \mathbf{E}_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{m \times n}$ *matici typu* $m \times n$ *nad tělesem* K, *která sestává ze samých nul, kromě pozice* (k, l), *na které je 1.*

Zřejmě každou matici $\mathbf{A} = (a_{kl}) \in K^{m \times n}$ *lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru*

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \mathbf{E}_{kl}.$$

Kanonická báze V

Příklad 5.11

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. *Pro libovolné* $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$ *označme* $\mathbf{E}_{kl}^{(m,n)} = \mathbf{E}_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{m\times n}$ *matici typu* $m \times n$ *nad tělesem* K, *která sestává ze samých nul, kromě pozice* (k, l), *na které je 1.*

Zřejmě každou matici $\mathbf{A} = (a_{kl}) \in K^{m\times n}$ *lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru*

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\mathbf{E}_{kl}.$$

Z toho vyplývá, že matice $\mathbf{E}_{kl}^{(m,n)}$, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$, *tvoří bázi vektorového prostoru* $K^{m\times n}$ *všech matic typu* $m \times n$ *nad tělesem* K.

Kanonická báze V

Příklad 5.11

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. *Pro libovolné* $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$ *označme* $\mathbf{E}_{kl}^{(m,n)} = \mathbf{E}_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{m \times n}$ *matici typu* $m \times n$ *nad tělesem* K, *která sestává ze samých nul, kromě pozice* (k, l), *na které je 1.*

Zřejmě každou matici $\mathbf{A} = (a_{kl}) \in K^{m \times n}$ *lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru*

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \mathbf{E}_{kl}.$$

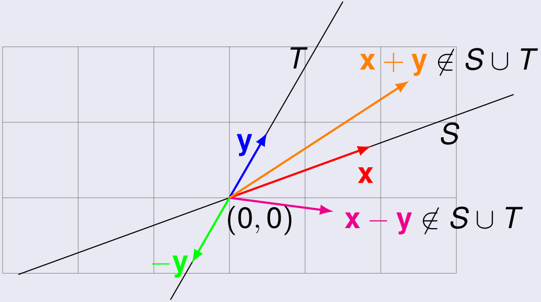
Z toho vyplývá, že matice $\mathbf{E}_{kl}^{(m,n)}$, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$, *tvoří bázi vektorového prostoru* $K^{m \times n}$ *všech matic typu* $m \times n$ *nad tělesem* K.

Speciálním případem je kanonická báze $\varepsilon^{(n)}$ *v prostoru* K^n.

Dostáváme tak vztah: $\dim K^{m \times n} = mn$.

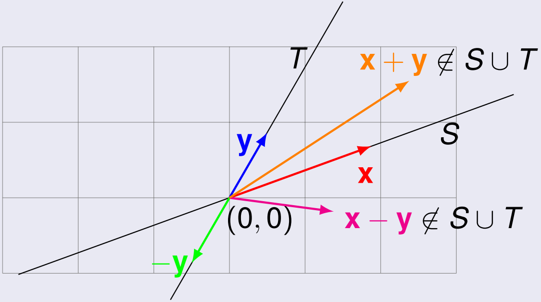
Souřadnice vektoru XV

Příklad 5.12



Souřadnice vektoru XV

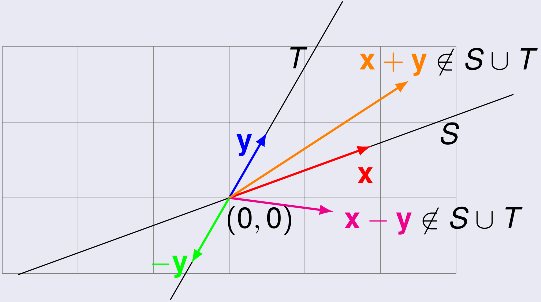
Příklad 5.12



Souřadnice vektoru $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ *v bázi* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *je vektor* $(1, 1)$.

Souřadnice vektoru XV

Příklad 5.12



Souřadnice vektoru $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ *v bázi* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *je vektor* $(1,1)$.

Souřadnice vektoru $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ *v bázi* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *je vektor* $(1,-1)$.

Dimenze součtu a součinu I

Věta 5.13

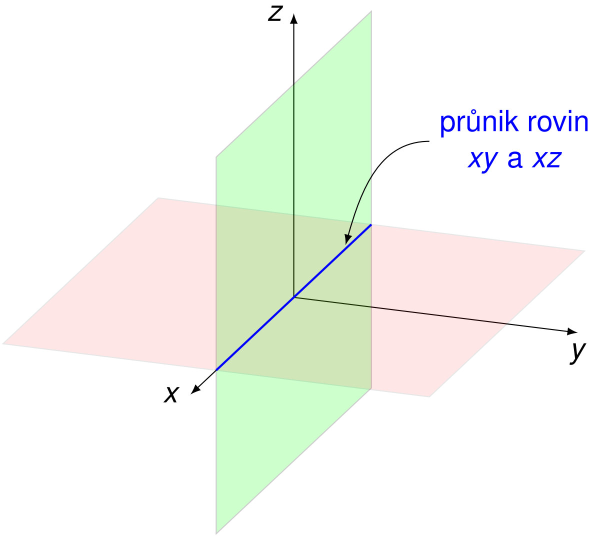
Nechť $S, T \subseteq V$ jsou konečně rozměrné lineární podprostory vektorového prostoru V.

Dimenze součtu a součinu I

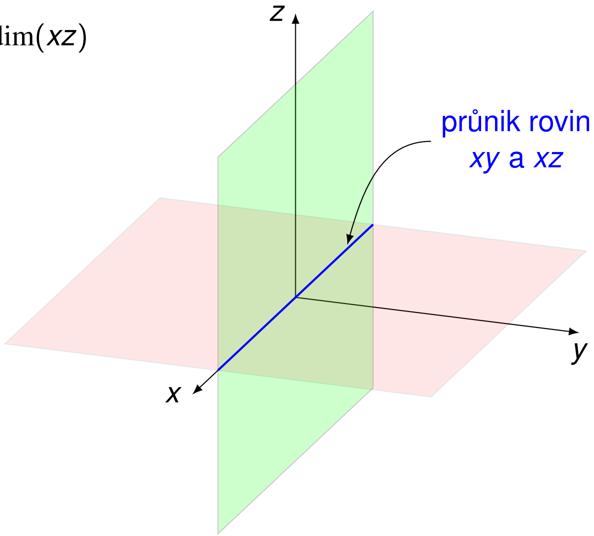
Věta 5.13

Nechť $S, T \subseteq V$ jsou konečně rozměrné lineární podprostory vektorového prostoru V.
Potom

$$\dim(S+T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T).$$

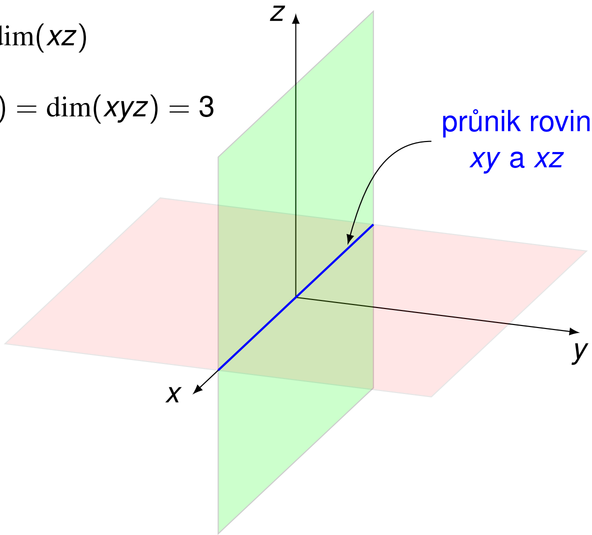

z
průnik rovin
xy a xz
y
x

$$\dim(xy) = 2 = \dim(xz)$$



$$\dim(xy) = 2 = \dim(xz)$$

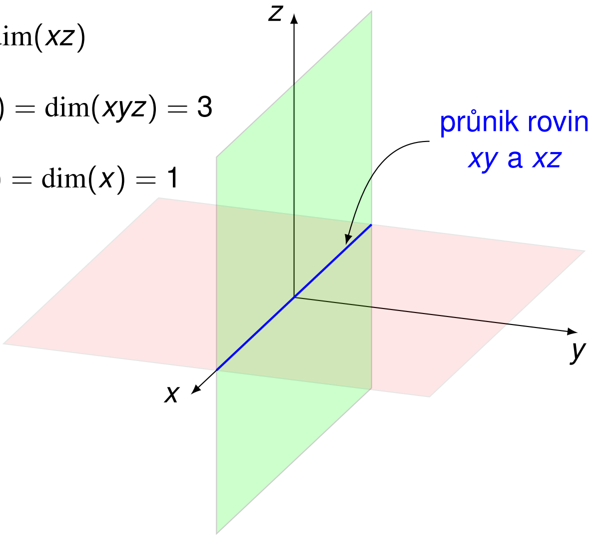
$$\dim((xy) + (xz)) = \dim(xyz) = 3$$



$$\dim(xy) = 2 = \dim(xz)$$

$$\dim((xy) + (xz)) = \dim(xyz) = 3$$

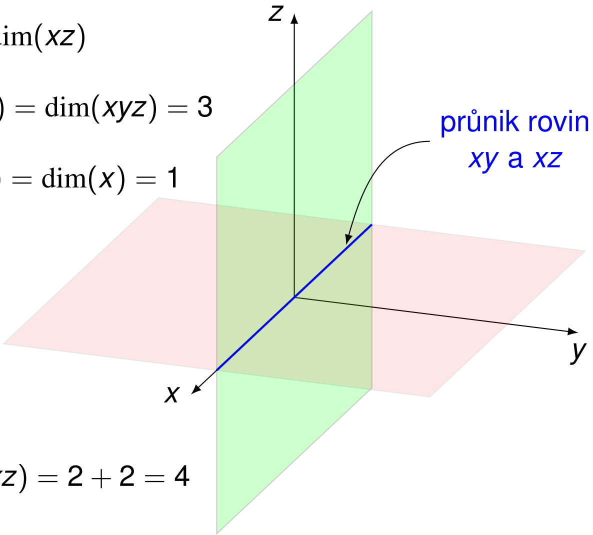
$$\dim((xy) \cap (xz)) = \dim(x) = 1$$



$$\dim(xy) = 2 = \dim(xz)$$

$$\dim((xy) + (xz)) = \dim(xyz) = 3$$

$$\dim((xy) \cap (xz)) = \dim(x) = 1$$

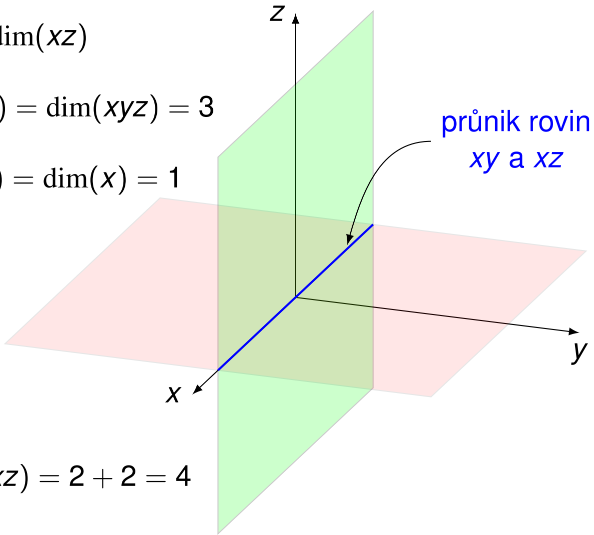


$$\dim(xy) + \dim(xz) = 2 + 2 = 4$$

$$\dim(xy) = 2 = \dim(xz)$$

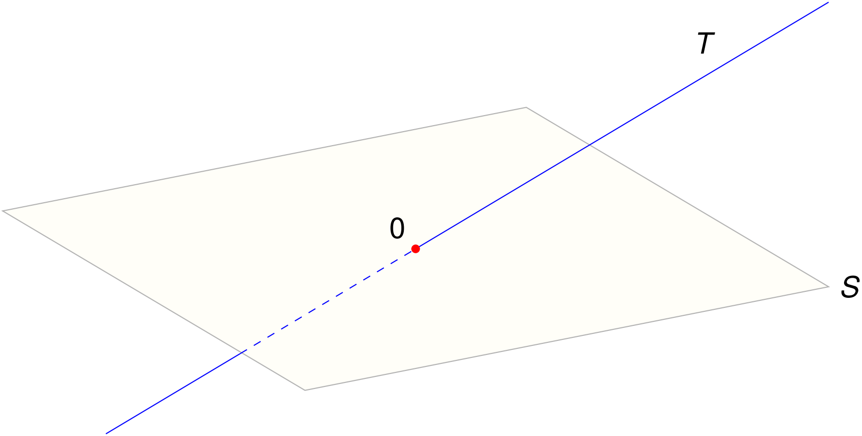
$$\dim((xy) + (xz)) = \dim(xyz) = 3$$

$$\dim((xy) \cap (xz)) = \dim(x) = 1$$



$$\dim(xy) + \dim(xz) = 2 + 2 = 4$$

$$\dim((xy) + (xz)) + \dim((xy) \cap (xz)) = 3 + 1 = 4$$


T
0
S

Dimenze součtu a součinu II

Nechť S, T jsou konečně rozměrné lineární podprostory vektorového prostoru V.

Dimenze součtu a součinu II

Nechť S, T jsou konečně rozměrné lineární podprostory vektorového prostoru V.
Potom $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, t. j. součet $S + T$ je direktní právě tehdy, když

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T.$$

Dimenze součtu a součinu II

Nechť S, T jsou konečně rozměrné lineární podprostory vektorového prostoru V.
Potom $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, t. j. součet $S + T$ je direktní právě tehdy, když

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T.$$

Tvrzení 5.14

Nech't V, W jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad K.

Dimenze součtu a součinu II

Nechť S, T jsou konečně rozměrné lineární podprostory vektorového prostoru V.
Potom $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, t. j. součet $S + T$ je direktní právě tehdy, když

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T.$$

Tvrzení 5.14

Nech't V, W jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad K. Potom pro dimenzi jejich kartézského součinu platí

$$\dim(V \times W) = \dim V + \dim W.$$