

8. JÁDRO, OBRAZ a MATICE LINEÁRNÍHO ZOBRAZENÍ

Jan Paseka

Ústav matematiky a statistiky
Masarykova univerzita

4. listopadu 2024

Obsah

- 1 **Jádro a obraz lineárního zobrazení**
 - Vlastnosti lineárního zobrazení
 - Jádro a obraz lineárního zobrazení
 - Hodnost lineárního zobrazení

- **Lineární izomorfismy**

- 2 Matice lineárního zobrazení
- 3 Matice přechodu
- 4 Skeletní rozklad matic

Abstrakt

V této kapitole blíže prozkoumáme pojem ***lineárního zobrazení***.

Abstrakt

V této kapitole blíže prozkoumáme pojem ***lineárního zobrazení***.

To nám umožní ***porovnávat*** struktury různých vektorových prostorů nad tímž tělesem.

Abstrakt

V této kapitole blíže prozkoumáme pojem **lineárního zobrazení**.

To nám umožní **porovnávat** struktury různých vektorových prostorů nad tímž tělesem.

Budeme studovat pojem jádra, matice lineárního zobrazení a matice přechodu.

Obsah

- 1 **Jádro a obraz lineárního zobrazení**
 - Vlastnosti lineárního zobrazení
 - Jádro a obraz lineárního zobrazení
 - Hodnost lineárního zobrazení
 - 2 Matice lineárního zobrazení
 - 3 Matice přechodu
 - 4 Skeletní rozklad matic
- **Lineární izomorfismy**

Vlastnosti lineárního zobrazení I

Významné vlastnosti lineárních zobrazení jsou:

Vlastnosti lineárního zobrazení I

Významné vlastnosti lineárních zobrazení jsou:

kompozice (složení) lineárních zobrazení je opět lineární zobrazení

Vlastnosti lineárního zobrazení I

Významné vlastnosti lineárních zobrazení jsou:

kompozice (složení) lineárních zobrazení je opět lineární zobrazení

a obrazy i vzory lineárních podprostorů v lineárních zobrazeních jsou též lineární podprostory.

Vlastnosti lineárního zobrazení I

Významné vlastnosti lineárních zobrazení jsou:

kompozice (složení) lineárních zobrazení je opět lineární zobrazení

a obrazy i vzory lineárních podprostorů v lineárních zobrazeních jsou též lineární podprostory.

Tvrzení 1.1

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\psi : W \rightarrow V, \varphi : V \rightarrow U$ jsou lineární zobrazení.

Vlastnosti lineárního zobrazení I

Významné vlastnosti lineárních zobrazení jsou:

kompozice (složení) lineárních zobrazení je opět lineární zobrazení

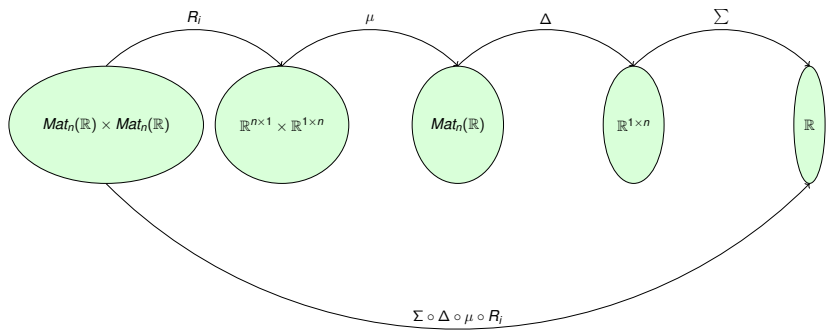
a obrazy i vzory lineárních podprostorů v lineárních zobrazeních jsou též lineární podprostory.

Tvrzení 1.1

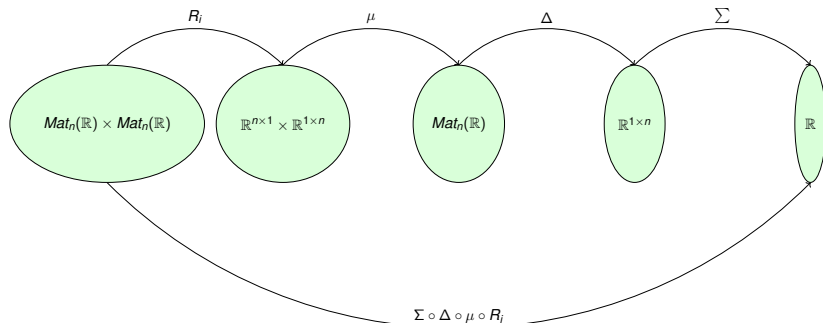
Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\psi : W \rightarrow V, \varphi : V \rightarrow U$ jsou lineární zobrazení.

Potom i jejich složení $\varphi \circ \psi : W \rightarrow U$ je lineární zobrazení.

Vlastnosti lineárního zobrazení II



Vlastnosti lineárního zobrazení II



$$R_i(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{s}_i(\mathbf{A}), \mathbf{r}_i(\mathbf{B})), \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \Delta(\mathbf{C}) = (c_{11}, \dots, c_{nn}),$$
$$\Sigma(\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^n z_j, (\Sigma \circ \Delta \circ \mu \circ R_i)(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_{j=1}^n a_{ji} b_{ij}.$$

Vlastnosti lineárního zobrazení III

Tvrzení 1.2

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení.

Vlastnosti lineárního zobrazení III

Tvrzení 1.2

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení.

- (a) Je-li S lineární podprostor prostoru V , tak $\varphi(S)$ je lineární podprostor prostoru U .*

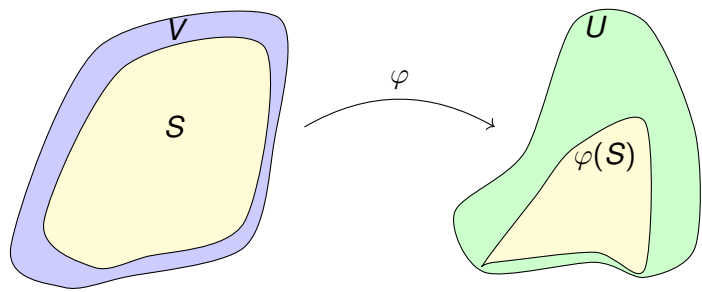
Vlastnosti lineárního zobrazení III

Tvrzení 1.2

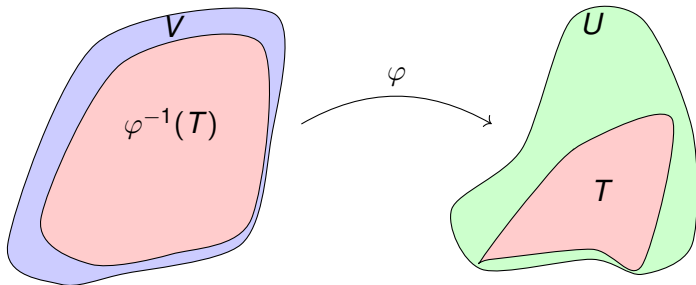
Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení.

- (a) Je-li S lineární podprostor prostoru V , tak $\varphi(S)$ je lineární podprostor prostoru U .*
- (b) Je-li T lineární podprostor prostoru U , tak $\varphi^{-1}(T)$ je lineární podprostor prostoru V .*

Vlastnosti lineárního zobrazení IV



Vlastnosti lineárního zobrazení V



Jádro I

Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K .

Jádro I

Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K .

Jeho **jádre**m nazýváme množinu

$$\text{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in V; \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Jádro I

Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K .

Jeho **jádre**m nazýváme množinu

$$\text{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in V; \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Obrazem lineárního zobrazení φ nazýváme množinu

$$\text{Im}\varphi = \varphi(V) = \{\varphi(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in V\}.$$

Jádro I

Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K .

Jeho **jádre**m nazýváme množinu

$$\text{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in V; \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Obrazem lineárního zobrazení φ nazýváme množinu

$$\text{Im}\varphi = \varphi(V) = \{\varphi(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in V\}.$$

Výše zavedené označení pochází z anglických slov **kernel** a **image**.

Jádro II

Protože $\{\mathbf{0}\}$ je lineární podprostor prostoru U a V je lineární podprostor prostoru V , jako speciální případ tvrzení o vzoru a obrazu lineárního zobrazení dostáváme následující výsledek.

Jádro II

Protože $\{\mathbf{0}\}$ je lineární podprostor prostoru U a V je lineární podprostor prostoru V , jako speciální případ tvrzení o vzoru a obrazu lineárního zobrazení dostáváme následující výsledek.

Tvrzení 1.3

Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K .

Jádro II

Protože $\{\mathbf{0}\}$ je lineární podprostor prostoru U a V je lineární podprostor prostoru V , jako speciální případ tvrzení o vzoru a obrazu lineárního zobrazení dostáváme následující výsledek.

Tvrzení 1.3

Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K .

Potom $\text{Ker}\varphi$ a $\text{Im}\varphi$ jsou lineární podprostory.

Jádro II

Protože $\{\mathbf{0}\}$ je lineární podprostor prostoru U a V je lineární podprostor prostoru V , jako speciální případ tvrzení o vzoru a obrazu lineárního zobrazení dostáváme následující výsledek.

Tvrzení 1.3

Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K .

Potom $\text{Ker}\varphi$ a $\text{Im}\varphi$ jsou lineární podprostory.

Pomocí pojmů jádra a obrazu můžeme charakterizovat injektivní resp. surjektivní lineární zobrazení.

Jádro II

Protože $\{\mathbf{0}\}$ je lineární podprostor prostoru U a V je lineární podprostor prostoru V , jako speciální případ tvrzení o vzoru a obrazu lineárního zobrazení dostáváme následující výsledek.

Tvrzení 1.3

Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K .

Potom $\text{Ker}\varphi$ a $\text{Im}\varphi$ jsou lineární podprostory.

Pomocí pojmů jádra a obrazu můžeme charakterizovat injektivní resp. surjektivní lineární zobrazení.

Věta 1.4

Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení. Potom

Jádro II

Protože $\{\mathbf{0}\}$ je lineární podprostor prostoru U a V je lineární podprostor prostoru V , jako speciální případ tvrzení o vzoru a obrazu lineárního zobrazení dostáváme následující výsledek.

Tvrzení 1.3

Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K .

Potom $\text{Ker}\varphi$ a $\text{Im}\varphi$ jsou lineární podprostory.

Pomocí pojmů jádra a obrazu můžeme charakterizovat injektivní resp. surjektivní lineární zobrazení.

Věta 1.4

Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení. Potom

(a) φ je injektivní právě tehdy, když $\text{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$;

Jádro II

Protože $\{\mathbf{0}\}$ je lineární podprostor prostoru U a V je lineární podprostor prostoru V , jako speciální případ tvrzení o vzoru a obrazu lineárního zobrazení dostáváme následující výsledek.

Tvrzení 1.3

Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K .

Potom $\text{Ker}\varphi$ a $\text{Im}\varphi$ jsou lineární podprostory.

Pomocí pojmů jádra a obrazu můžeme charakterizovat injektivní resp. surjektivní lineární zobrazení.

Věta 1.4

Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení. Potom

- (a) φ je injektivní právě tehdy, když $\text{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$;*
- (b) φ je surjektivní právě tehdy, když $\text{Im}\varphi = U$.*

Hodnost lineárního zobrazení I

Věta 1.5

Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení, přičemž vektorový prostor V je konečně rozměrný.

Hodnost lineárního zobrazení I

Věta 1.5

Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení, přičemž vektorový prostor V je konečně rozměrný.

Potom i $\text{Ker}\varphi$ a $\text{Im}\varphi$ jsou konečně rozměrné prostory a platí

Hodnost lineárního zobrazení I

Věta 1.5

Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení, přičemž vektorový prostor V je konečně rozměrný.

Potom i $\text{Ker}\varphi$ a $\text{Im}\varphi$ jsou konečně rozměrné prostory a platí

$$\dim V = \dim \text{Ker}\varphi + \dim \text{Im}\varphi.$$

Hodnost lineárního zobrazení I

Věta 1.5

Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení, přičemž vektorový prostor V je konečně rozměrný.

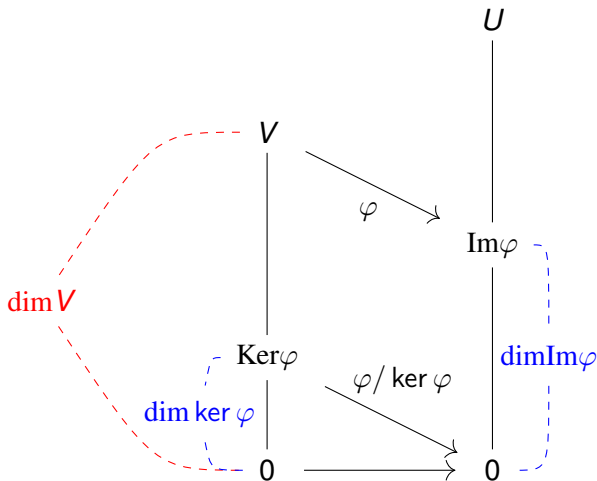
Potom i $\text{Ker}\varphi$ a $\text{Im}\varphi$ jsou konečně rozměrné prostory a platí

$$\dim V = \dim \text{Ker}\varphi + \dim \text{Im}\varphi.$$

Dimenzi obrazu $\text{Im}\varphi$ nazýváme **hodností** lineárního zobrazení φ a značíme ji

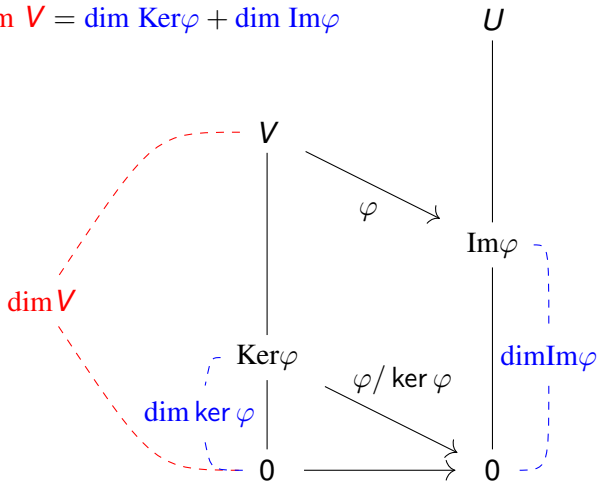
$$h(\varphi) = \dim \text{Im}\varphi.$$

Hodnost lineárního zobrazení II



Hodnost lineárního zobrazení II

$$\dim V = \dim \text{Ker} \varphi + \dim \text{Im} \varphi$$



Hodnost lineárního zobrazení III

Lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow V$ vektorového prostoru V do sebe nazýváme ***lineárním operátorem***

Hodnost lineárního zobrazení III

Lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow V$ vektorového prostoru V do sebe nazýváme **lineárním operátorem** neboli **lineární transformací**.

Hodnost lineárního zobrazení III

Lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow V$ vektorového prostoru V do sebe nazýváme **lineárním operátorem** neboli **lineární transformací**.

Důsledek 1.6

Nechť $\varphi : V \rightarrow V$ je lineární transformace konečně rozměrného vektorového prostoru V .

Hodnost lineárního zobrazení III

Lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow V$ vektorového prostoru V do sebe nazýváme **lineárním operátorem** neboli **lineární transformací**.

Důsledek 1.6

Nechť $\varphi : V \rightarrow V$ je lineární transformace konečně rozměrného vektorového prostoru V .

Potom φ je injektivní právě tehdy, když je surjektivní.

Lineární izomorfismy I

Bijektivní lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ mezi vektorovými prostory V, U nad tímž tělesem K nazýváme ***lineární izomorfismus***.

Lineární izomorfismy I

Bijektivní lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ mezi vektorovými prostory V, U nad tímž tělesem K nazýváme **lineární izomorfismus**.

Říkáme, že vektorové prostory V, U jsou **lineárně izomorfní** nebo jen krátce **izomorfní** a píšeme $V \cong U$,

Lineární izomorfismy I

Bijektivní lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ mezi vektorovými prostory V, U nad tímž tělesem K nazýváme **lineární izomorfismus**.

Říkáme, že vektorové prostory V, U jsou **lineárně izomorfní** nebo jen krátce **izomorfní** a píšeme $V \cong U$, pokud existuje nějaký lineární izomorfismus $\varphi : V \rightarrow U$.

Tvrzení 1.7

Necht' U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K .

Lineární izomorfismy I

Bijektivní lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ mezi vektorovými prostory V, U nad tímž tělesem K nazýváme **lineární izomorfismus**.

Říkáme, že vektorové prostory V, U jsou **lineárně izomorfní** nebo jen krátce **izomorfní** a píšeme $V \cong U$, pokud existuje nějaký lineární izomorfismus $\varphi : V \rightarrow U$.

Tvrzení 1.7

Necht' U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K .

(a) $\text{id}_V : V \rightarrow V$ je lineární izomorfismus.

Lineární izomorfismy I

Bijektivní lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ mezi vektorovými prostory V, U nad tímž tělesem K nazýváme **lineární izomorfismus**.

Říkáme, že vektorové prostory V, U jsou **lineárně izomorfní** nebo jen krátce **izomorfní** a píšeme $V \cong U$, pokud existuje nějaký lineární izomorfismus $\varphi : V \rightarrow U$.

Tvrzení 1.7

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K .

- (a) $\text{id}_V : V \rightarrow V$ je lineární izomorfismus.*
- (b) Je-li $\varphi : V \rightarrow U$ lineární izomorfismus, pak i $\varphi^{-1} : U \rightarrow V$ je lineární izomorfismus.*

Lineární izomorfismy I

Bijektivní lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ mezi vektorovými prostory V, U nad tímž tělesem K nazýváme **lineární izomorfismus**.

Říkáme, že vektorové prostory V, U jsou **lineárně izomorfní** nebo jen krátce **izomorfní** a píšeme $V \cong U$, pokud existuje nějaký lineární izomorfismus $\varphi : V \rightarrow U$.

Tvrzení 1.7

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K .

- (a) $\text{id}_V : V \rightarrow V$ je lineární izomorfismus.*
- (b) Je-li $\varphi : V \rightarrow U$ lineární izomorfismus, pak i $\varphi^{-1} : U \rightarrow V$ je lineární izomorfismus.*
- (c) Jsou-li $\psi : W \rightarrow V, \varphi : V \rightarrow U$ lineární izomorfismy, pak i $\varphi \circ \psi : W \rightarrow U$ je lineární izomorfismus.*

Lineární izomorfismy II

Z právě dokázaného tvrzení okamžitě vyplývá následující důsledek.

Lineární izomorfismy II

Z právě dokázaného tvrzení okamžitě vyplývá následující důsledek.

Důsledek 1.8

Pro libovolné vektorové prostory U, V, W nad tímž tělesem K platí:

Lineární izomorfismy II

Z právě dokázaného tvrzení okamžitě vyplývá následující důsledek.

Důsledek 1.8

Pro libovolné vektorové prostory U, V, W nad tímž tělesem K platí:

(a) $V \cong V;$

Lineární izomorfismy II

Z právě dokázaného tvrzení okamžitě vyplývá následující důsledek.

Důsledek 1.8

Pro libovolné vektorové prostory U, V, W nad tímž tělesem K platí:

(a) $V \cong V;$

(b) $V \cong U \Rightarrow U \cong V;$

Lineární izomorfismy II

Z právě dokázaného tvrzení okamžitě vyplývá následující důsledek.

Důsledek 1.8

Pro libovolné vektorové prostory U, V, W nad tímž tělesem K platí:

(a) $V \cong V;$

(b) $V \cong U \Rightarrow U \cong V;$

(c) $W \cong V \ \& \ V \cong U \Rightarrow W \cong U.$

Říkáme, že vztah izomorfности \cong je **reflexivní**, **symetrický** a **tranzitivní**, tj. je vztahem **ekvivalence**.

Lineární izomorfismy II

Z právě dokázaného tvrzení okamžitě vyplývá následující důsledek.

Důsledek 1.8

Pro libovolné vektorové prostory U, V, W nad tímž tělesem K platí:

(a) $V \cong V;$

(b) $V \cong U \Rightarrow U \cong V;$

(c) $W \cong V \ \& \ V \cong U \Rightarrow W \cong U.$

Říkáme, že vztah izomorfности \cong je **reflexivní**, **symetrický** a **tranzitivní**, tj. je vztahem **ekvivalence**.

Z formálního hlediska s ním můžeme pracovat podobně jako se vztahem rovnosti $=$.

Lineární izomorfismy III

Příklad 1.9

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor nad tělesem K , $\dim V = n$ a $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je nějaká jeho báze.

Lineární izomorfismy III

Příklad 1.9

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor nad tělesem K , $\dim V = n$ a $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je nějaká jeho báze.

Potom souřadnicové zobrazení $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\beta$ je lineární izomorfismus $V \rightarrow K^n$.

Lineární izomorfismy III

Příklad 1.9

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor nad tělesem K , $\dim V = n$ a $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je nějaká jeho báze.

Potom souřadnicové zobrazení $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\beta$ je lineární izomorfismus $V \rightarrow K^n$.

Platí, že typ izomorfismu daného konečně rozměrného prostoru je jednoznačně určený jeho dimenzí.

Lineární izomorfismy III

Příklad 1.9

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor nad tělesem K , $\dim V = n$ a $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je nějaká jeho báze.

Potom souřadnicové zobrazení $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\beta$ je lineární izomorfismus $V \rightarrow K^n$.

Platí, že typ izomorfismu daného konečně rozměrného prostoru je jednoznačně určený jeho dimenzí.

Věta 1.10

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K .

Lineární izomorfismy III

Příklad 1.9

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor nad tělesem K , $\dim V = n$ a $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je nějaká jeho báze.

Potom souřadnicové zobrazení $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\beta$ je lineární izomorfismus $V \rightarrow K^n$.

Platí, že typ izomorfismu daného konečně rozměrného prostoru je jednoznačně určený jeho dimenzí.

Věta 1.10

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K .

Potom

$$V \cong U \Leftrightarrow \dim V = \dim U.$$

Lineární izomorfismy IV

Tedy konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní se sloupcovým (řádkovým) vektorovým prostorem K^n právě tehdy, když $n = \dim V$.

Lineární izomorfismy IV

Tedy konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní se sloupcovým (řádkovým) vektorovým prostorem K^n právě tehdy, když $n = \dim V$.

Přitom každá báze β prostoru V určuje jeden takovýto izomorfismus $V \rightarrow K^n$ –

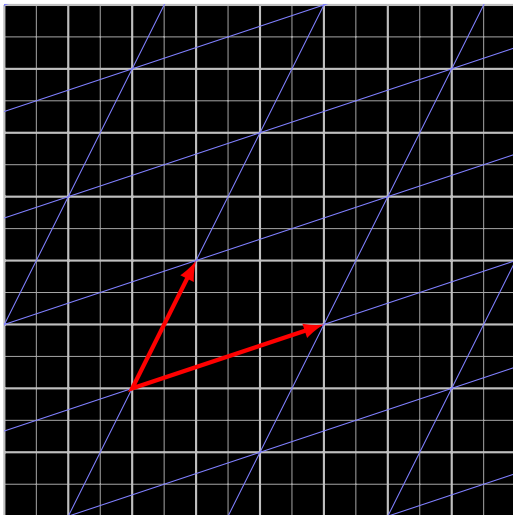
Lineární izomorfismy IV

Tedy konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní se sloupcovým (řádkovým) vektorovým prostorem K^n právě tehdy, když $n = \dim V$.

Přitom každá báze β prostoru V určuje jeden takovýto izomorfismus $V \rightarrow K^n$ –

je jím souřadnicové zobrazení $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\beta$.

Lineární izomorfismy V



Obsah

- 1 Jádro a obraz lineárního zobrazení
- 2 Matice lineárního zobrazení
 - Motivace
 - Matice v bazích
 - Příklady
 - Prostory lineárních zobrazení
- 3 Matice přechodu
- 4 Skeletní rozklad matic

Motivace I

Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : K^n \rightarrow K^m$. V prostoru K^n máme kanonickou bázi $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

Motivace I

Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : K^n \rightarrow K^m$. V prostoru K^n máme kanonickou bázi $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

Protože obrazy $\varphi(\mathbf{e}_j)$ vektorů této báze jsou sloupcové vektory z prostoru K^m , můžeme vytvořit matici

Motivace I

Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : K^n \rightarrow K^m$. V prostoru K^n máme kanonickou bázi $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

Protože obrazy $\varphi(\mathbf{e}_j)$ vektorů této báze jsou sloupcové vektory z prostoru K^m , můžeme vytvořit matici

$$\mathbf{A} = (\varphi(\mathbf{e}_1), \dots, \varphi(\mathbf{e}_n)) \in K^{m \times n},$$

Motivace I

Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : K^n \rightarrow K^m$. V prostoru K^n máme kanonickou bázi $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

Protože obrazy $\varphi(\mathbf{e}_j)$ vektorů této báze jsou sloupcové vektory z prostoru K^m , můžeme vytvořit matici

$$\mathbf{A} = (\varphi(\mathbf{e}_1), \dots, \varphi(\mathbf{e}_n)) \in K^{m \times n},$$

jejímiž sloupci jsou právě tyto vektory,

Motivace I

Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : K^n \rightarrow K^m$. V prostoru K^n máme kanonickou bázi $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

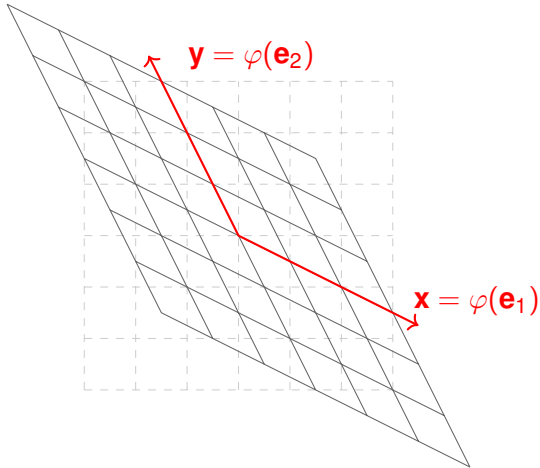
Protože obrazy $\varphi(\mathbf{e}_j)$ vektorů této báze jsou sloupcové vektory z prostoru K^m , můžeme vytvořit matici

$$\mathbf{A} = (\varphi(\mathbf{e}_1), \dots, \varphi(\mathbf{e}_n)) \in K^{m \times n},$$

jejímiž sloupci jsou právě tyto vektory,

t. j. platí $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{e}_j)$ pro $1 \leq j \leq n$.

Motivace II



Motivace III

Ukážeme, jak můžeme obraz $\varphi(\mathbf{x})$ libovolného vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^n$ vypočítat pouze ze znalosti této matice.

Motivace III

Ukážeme, jak můžeme obraz $\varphi(\mathbf{x})$ libovolného vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^n$ vypočítat pouze ze znalosti této matice.

Uvědomme si, že $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$, a počítejme

Motivace III

Ukážeme, jak můžeme obraz $\varphi(\mathbf{x})$ libovolného vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^n$ vypočítat pouze ze znalosti této matice.

Uvědomme si, že $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$, a počítejme

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n)$$

Motivace III

Ukážeme, jak můžeme obraz $\varphi(\mathbf{x})$ libovolného vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^n$ vypočítat pouze ze znalosti této matice.

Uvědomme si, že $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$, a počítejme

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \dots + x_n\varphi(\mathbf{e}_n)\end{aligned}$$

Motivace III

Ukážeme, jak můžeme obraz $\varphi(\mathbf{x})$ libovolného vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^n$ vypočítat pouze ze znalosti této matice.

Uvědomme si, že $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$, a počítejme

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \dots + x_n\varphi(\mathbf{e}_n) \\ &= (\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \cdot (x_1, \dots, x_n)^T\end{aligned}$$

Motivace III

Ukážeme, jak můžeme obraz $\varphi(\mathbf{x})$ libovolného vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^n$ vypočítat pouze ze znalosti této matice.

Uvědomme si, že $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$, a počítejme

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \dots + x_n\varphi(\mathbf{e}_n) \\ &= (\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \cdot (x_1, \dots, x_n)^T \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\end{aligned}$$

Motivace III

Ukážeme, jak můžeme obraz $\varphi(\mathbf{x})$ libovolného vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^n$ vypočítat pouze ze znalosti této matice.

Uvědomme si, že $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$, a počítejme

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \dots + x_n\varphi(\mathbf{e}_n) \\ &= (\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \cdot (x_1, \dots, x_n)^T \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\end{aligned}$$

Tedy **každé** lineární zobrazení $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ má tvar $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro vhodnou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

Motivace IV

Protože každý konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní s prostorem K^n pro $n = \dim V$,

Motivace IV

Protože každý konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní s prostorem K^n pro $n = \dim V$,

při volbě pevných bazí v konečně rozměrných prostorech U, V , bude možné libovolné lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ zakódovat pomocí vhodné matice \mathbf{A} .

Motivace IV

Protože každý konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní s prostorem K^n pro $n = \dim V$,

při volbě pevných bazí v konečně rozměrných prostorech U, V , bude možné libovolné lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ zakódovat pomocí vhodné matice \mathbf{A} .

 V U K^n K^m

Motivace IV

Protože každý konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní s prostorem K^n pro $n = \dim V$,

při volbě pevných bazí v konečně rozměrných prostorech U , V , bude možné libovolné lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ zakódovat pomocí vhodné matice \mathbf{A} .

$$\begin{array}{ccc} & V & U \\ & \uparrow & \\ (-)_{\beta}^{-1} & & \\ & K^n & K^m \end{array}$$

Motivace IV

Protože každý konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní s prostorem K^n pro $n = \dim V$,

při volbě pevných bazí v konečně rozměrných prostorech U , V , bude možné libovolné lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ zakódovat pomocí vhodné matice \mathbf{A} .

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & U \\ \uparrow (-)_{\beta}^{-1} & & \\ K^n & & K^m \end{array}$$

Motivace IV

Protože každý konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní s prostorem K^n pro $n = \dim V$,

při volbě pevných bazí v konečně rozměrných prostorech U , V , bude možné libovolné lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ zakódovat pomocí vhodné matice \mathbf{A} .

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & U \\ \uparrow (-)_{\beta}^{-1} & & \downarrow (-)_{\alpha} \\ K^n & & K^m \end{array}$$

Motivace IV

Protože každý konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní s prostorem K^n pro $n = \dim V$,

při volbě pevných bazí v konečně rozměrných prostorech U, V , bude možné libovolné lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ zakódovat pomocí vhodné matice \mathbf{A} .

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\varphi} & U \\
 \uparrow (-)_{\beta}^{-1} & & \downarrow (-)_{\alpha} \\
 K^n & \xrightarrow{\mathbf{A} \cdot (-) = (-)_{\alpha} \circ \varphi \circ (-)_{\beta}^{-1}} & K^m
 \end{array}$$

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím I

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K , $\dim U = m$, $\dim V = n$ a $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$, $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jsou báze v U , resp. ve V .

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím I

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K , $\dim U = m$, $\dim V = n$ a $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$, $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jsou báze v U , resp. ve V .

Maticí lineárního zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ vzhledem k bazím β, α nazýváme matici

$$\mathbf{A} = ((\varphi(\mathbf{v}_1))_\alpha, \dots, (\varphi(\mathbf{v}_n))_\alpha) \in K^{m \times n},$$

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím I

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K , $\dim U = m$, $\dim V = n$ a $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$, $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jsou báze v U , resp. ve V .

Maticí lineárního zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ vzhledem k bazím β, α nazýváme matici

$$\mathbf{A} = ((\varphi(\mathbf{v}_1))_\alpha, \dots, (\varphi(\mathbf{v}_n))_\alpha) \in K^{m \times n},$$

jejíž sloupce jsou tvořeny souřadnicemi obrazů $\varphi(\mathbf{v}_j)$ vektorů báze β vzhledem k bázi α ,

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím I

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K , $\dim U = m$, $\dim V = n$ a $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$, $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jsou báze v U , resp. ve V .

Maticí lineárního zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ vzhledem k bazím β, α nazýváme matici

$$\mathbf{A} = ((\varphi(\mathbf{v}_1))_\alpha, \dots, (\varphi(\mathbf{v}_n))_\alpha) \in K^{m \times n},$$

jejíž sloupce jsou tvořeny souřadnicemi obrazů $\varphi(\mathbf{v}_j)$ vektorů báze β vzhledem k bázi α ,

t.j. platí $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = (\varphi(\mathbf{v}_j))_\alpha$ pro $1 \leq j \leq n$.

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím I

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K , $\dim U = m$, $\dim V = n$ a $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$, $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jsou báze v U , resp. ve V .

Maticí lineárního zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ vzhledem k bazím β, α nazýváme matici

$$\mathbf{A} = ((\varphi(\mathbf{v}_1))_\alpha, \dots, (\varphi(\mathbf{v}_n))_\alpha) \in K^{m \times n},$$

jejíž sloupce jsou tvořeny souřadnicemi obrazů $\varphi(\mathbf{v}_j)$ vektorů báze β vzhledem k bázi α ,

t.j. platí $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = (\varphi(\mathbf{v}_j))_\alpha$ pro $1 \leq j \leq n$.

Tuto matici značíme též

$$\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha, \beta}.$$

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím II

Všimněme si u $(\varphi)_{\alpha,\beta}$ obrácené pořadí znaků bazí vůči pořadí vektorových prostorů v označení zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$.

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím II

Všimněme si u $(\varphi)_{\alpha,\beta}$ obrácené pořadí znaků bazí vůči pořadí vektorových prostorů v označení zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$.

Matici **A** ze začátku tohoto paragrafu můžeme nazvat **maticí lineárního zobrazení** $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ **vzhledem na kanonickou bázi** $\varepsilon^{(n)}, \varepsilon^{(m)}$.

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím II

Všimněme si u $(\varphi)_{\alpha,\beta}$ obrácené pořadí znaků bazí vůči pořadí vektorových prostorů v označení zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$.

Matici \mathbf{A} ze začátku tohoto paragrafu můžeme nazvat **maticí lineárního zobrazení** $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ **vzhledem na kanonickou bázi** $\varepsilon^{(n)}, \varepsilon^{(m)}$.

Tedy $\mathbf{A} = (\varphi)_{\varepsilon^{(m)}, \varepsilon^{(n)}}$.

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím II

Všimněme si u $(\varphi)_{\alpha,\beta}$ obrácené pořadí znaků bazí vůči pořadí vektorových prostorů v označení zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$.

Matici \mathbf{A} ze začátku tohoto paragrafu můžeme nazvat **maticí lineárního zobrazení** $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ **vzhledem na kanonickou bázi** $\varepsilon^{(n)}, \varepsilon^{(m)}$.

Tedy $\mathbf{A} = (\varphi)_{\varepsilon^{(m)}, \varepsilon^{(n)}}$.

Pokud neřekneme jinak, budeme pod maticí lineárního zobrazení $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ mezi sloupcovými vektorovými prostory vždy rozumět matici $(\varphi)_{\varepsilon^{(m)}, \varepsilon^{(n)}}$ zobrazení φ vzhledem ke kanonickým bazím.

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím III

Maticí lineární transformace $\varphi : V \rightarrow V$ vzhledem k bázi α prostoru V tedy rozumíme matici $(\varphi)_{\alpha, \alpha}$.

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím III

Maticí lineární transformace $\varphi : V \rightarrow V$ vzhledem k bázi α prostoru V tedy rozumíme matici $(\varphi)_{\alpha, \alpha}$.

Přitom platí $(\mathbf{v}_j)_{\beta} = \mathbf{e}_j^{(n)}$ pro libovolný vektor \mathbf{v}_j báze $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru V .

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím III

Maticí lineární transformace $\varphi : V \rightarrow V$ vzhledem k bázi α prostoru V tedy rozumíme matici $(\varphi)_{\alpha, \alpha}$.

Přitom platí $(\mathbf{v}_j)_{\beta} = \mathbf{e}_j^{(n)}$ pro libovolný vektor \mathbf{v}_j báze $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru V .

Z toho je zřejmé, že pro každou bázi β n -rozměrného vektorového prostoru V platí

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím III

Maticí lineární transformace $\varphi : V \rightarrow V$ vzhledem k bázi α prostoru V tedy rozumíme matici $(\varphi)_{\alpha, \alpha}$.

Přitom platí $(\mathbf{v}_j)_{\beta} = \mathbf{e}_j^{(n)}$ pro libovolný vektor \mathbf{v}_j báze $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ prostoru V .

Z toho je zřejmé, že pro každou bázi β n -rozměrného vektorového prostoru V platí

$$(\text{id}_V)_{\beta, \beta} = (\mathbf{e}_j^{(n)})_{j=1}^n = \mathbf{I}_n.$$

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím IV

Věta 2.1

Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad tělesem K , $\dim V = n$, $\dim U = m$ a α, β jsou báze prostorů U resp. V .

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím IV

Věta 2.1

Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad tělesem K , $\dim V = n$, $\dim U = m$ a α, β jsou báze prostorů U resp. V .

Potom pro všechna $\mathbf{x} \in V$ platí

$$(\varphi(\mathbf{x}))_{\alpha} = (\varphi)_{\alpha, \beta} \cdot (\mathbf{x})_{\beta}$$

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím IV

Věta 2.1

Nechť $\varphi : V \rightarrow U$ je lineární zobrazení mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad tělesem K , $\dim V = n$, $\dim U = m$ a α, β jsou báze prostorů U resp. V .

Potom pro všechna $\mathbf{x} \in V$ platí

$$(\varphi(\mathbf{x}))_{\alpha} = (\varphi)_{\alpha, \beta} \cdot (\mathbf{x})_{\beta}$$

a $\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha, \beta}$ je jediná matice touto vlastností.

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím V

Skládání lineárních zobrazení zodpovídá násobení matic.

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím V

Skládání lineárních zobrazení zodpovídá násobení matic.

Věta 2.2

Nechť U, V, W jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K , α je báze U , β je báze V a γ je báze W .

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím V

Skládání lineárních zobrazení zodpovídá násobení matic.

Věta 2.2

Nechť U, V, W jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K , α je báze U , β je báze V a γ je báze W .

Potom pro libovolné lineární zobrazení $\psi : W \rightarrow V$, $\varphi : V \rightarrow U$ platí

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím V

Skládání lineárních zobrazení zodpovídá násobení matic.

Věta 2.2

Nechť U, V, W jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K , α je báze U , β je báze V a γ je báze W .

Potom pro libovolné lineární zobrazení $\psi : W \rightarrow V$, $\varphi : V \rightarrow U$ platí

$$(\varphi \circ \psi)_{\alpha, \gamma} = (\varphi)_{\alpha, \beta} \cdot (\psi)_{\beta, \gamma}.$$

Příklady I

Příklad 2.3

Otočení roviny okolo počátku o úhel $\alpha \in \mathbb{R}$ je lineární zobrazení $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Příklady I

Příklad 2.3

Otočení roviny okolo počátku o úhel $\alpha \in \mathbb{R}$ je lineární zobrazení $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Matrici tohoto lineárního zobrazení vzhledem na kanonickou bázi ε budeme značit rovněž \mathbf{R}_α ,

Příklady I

Příklad 2.3

Otočení roviny okolo počátku o úhel $\alpha \in \mathbb{R}$ je lineární zobrazení $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Matici tohoto lineárního zobrazení vzhledem na kanonickou bázi ε budeme značit rovněž \mathbf{R}_α ,

tedy pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ budeme psát $\mathbf{R}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}$.

Příklady I

Příklad 2.3

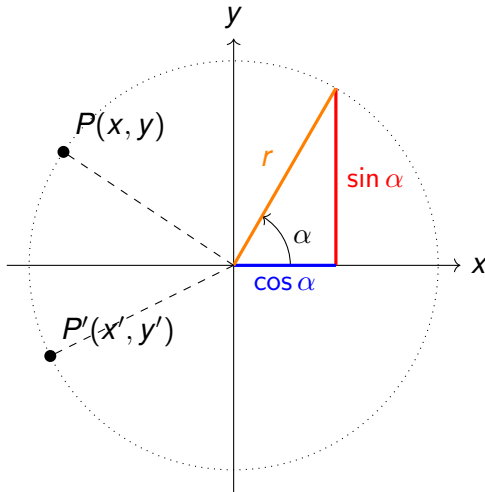
Otočení roviny okolo počátku o úhel $\alpha \in \mathbb{R}$ je lineární zobrazení $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Matici tohoto lineárního zobrazení vzhledem na kanonickou bázi ε budeme značit rovněž \mathbf{R}_α ,

tedy pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ budeme psát $\mathbf{R}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}$.

Její sloupce získáme otočením vektorů $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$ o úhel α .

Příklady II



Příklady II

Z definice goniometrických funkcí sinus a cosinus pomocí jednotkové kružnice dostávame

Příklady II

Z definice goniometrických funkcí sinus a cosinus pomocí jednotkové kružnice dostávame

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix},$$

Příklady II

Z definice goniometrických funkcí sinus a cosinus pomocí jednotkové kružnice dostáváme

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \\ \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \end{pmatrix}$$

Příklady II

Z definice goniometrických funkcí sinus a cosinus pomocí jednotkové kružnice dostáváme

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \\ \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Příklady II

Z definice goniometrických funkcí sinus a cosinus pomocí jednotkové kružnice dostáváme

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \\ \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

To znamená, že

Příklady II

Z definice goniometrických funkcí sinus a cosinus pomocí jednotkové kružnice dostáváme

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \\ \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

To znamená, že $\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

Příklady II

Z definice goniometrických funkcí sinus a cosinus pomocí jednotkové kružnice dostáváme

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \\ \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

To znamená, že $\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

a obrazem libovolného vektoru $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ v otočení \mathbf{R}_α je vektor

Příklady II

Z definice goniometrických funkcí sinus a cosinus pomocí jednotkové kružnice dostáváme

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \\ \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

To znamená, že
$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

a obrazem libovolného vektoru $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ v otočení \mathbf{R}_α je vektor

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Příklady III

Matice

$$\mathbf{R}_{\pi/6} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix}$$

Příklady III

Matice

$$\mathbf{R}_{\pi/6} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

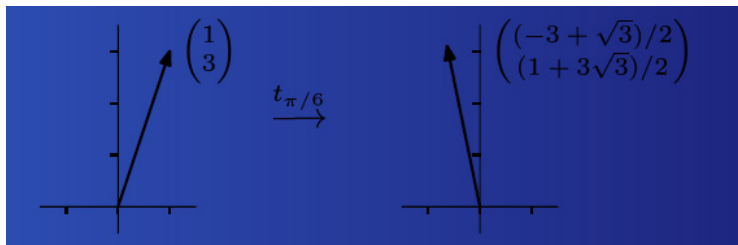
Příklady III

Matice

$$\mathbf{R}_{\pi/6} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

reprezentuje vzhledem ke standardní bázi transformaci

$\mathbf{R}_{\pi/6} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, která otočí vektory o $\pi/6$ radiánů proti směru hodinových ručiček.



Příklady IV

Příklad 2.4

Osová souměrnost roviny podle libovolné přímky procházející počátkem definuje zobrazení $\mathbf{S}_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je úhel, který svírá osa souměrnosti s osou x .

Příklady IV

Příklad 2.4

Osová souměrnost roviny podle libovolné přímky procházející počátkem definuje zobrazení $\mathbf{S}_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je úhel, který svírá osa souměrnosti s osou x .

Pomocí obdobné úvahy jako v případě otočení můžeme ověřit, že i \mathbf{S}_α je lineární zobrazení.

Příklady IV

Příklad 2.4

Osová souměrnost roviny podle libovolné přímky procházející počátkem definuje zobrazení $\mathbf{S}_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je úhel, který svírá osa souměrnosti s osou x .

Pomocí obdobné úvahy jako v případě otočení můžeme ověřit, že i \mathbf{S}_α je lineární zobrazení.

Jeho matici vzhledem ke kanonické bázi ε budeme značit stejně, tj. \mathbf{S}_α .

Příklady IV

Příklad 2.4

Osová souměrnost roviny podle libovolné přímky procházející počátkem definuje zobrazení $\mathbf{S}_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je úhel, který svírá osa souměrnosti s osou x .

Pomocí obdobné úvahy jako v případě otočení můžeme ověřit, že i \mathbf{S}_α je lineární zobrazení.

Jeho matici vzhledem ke kanonické bázi ε budeme značit stejně, tj. \mathbf{S}_α .

Zřejmě matice souměrnosti podle osy x je

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Příklady V

Osovou souměrnost \mathbf{S}_α můžeme obdržet jako složení otočení $\mathbf{R}_{-\alpha}$, osově souměrnosti \mathbf{S}_0 a otočení \mathbf{R}_α ,

Příklady V

Osovou souměrnost \mathbf{S}_α můžeme obdržet jako složení otočení $\mathbf{R}_{-\alpha}$, osově souměrnosti \mathbf{S}_0 a otočení \mathbf{R}_α ,

tj.

$$\mathbf{S}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{R}_{-\alpha}.$$

Po vynásobení příslušných matic z toho s využitím trigonometrických vzorců dostaneme

Příklady V

Osovou souměrnost \mathbf{S}_α můžeme obdržet jako složení otočení $\mathbf{R}_{-\alpha}$, osově souměrnosti \mathbf{S}_0 a otočení \mathbf{R}_α ,

tj.

$$\mathbf{S}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{R}_{-\alpha}.$$

Po vynásobení příslušných matic z toho s využitím trigonometrických vzorců dostaneme

$$\mathbf{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Příklady V

Osovou souměrnost \mathbf{S}_α můžeme obdržet jako složení otočení $\mathbf{R}_{-\alpha}$, osově souměrnosti \mathbf{S}_0 a otočení \mathbf{R}_α ,

tj.

$$\mathbf{S}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{R}_{-\alpha}.$$

Po vynásobení příslušných matic z toho s využitím trigonometrických vzorců dostaneme

$$\mathbf{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Tedy osová souměrnost \mathbf{S}_α zobrazí vektor $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ na vektor

Příklady V

Osovou souměrnost \mathbf{S}_α můžeme obdržet jako složení otočení $\mathbf{R}_{-\alpha}$, osově souměrnosti \mathbf{S}_0 a otočení \mathbf{R}_α ,

tj.

$$\mathbf{S}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{R}_{-\alpha}.$$

Po vynásobení příslušných matic z toho s využitím trigonometrických vzorců dostaneme

$$\mathbf{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Tedy osová souměrnost \mathbf{S}_α zobrazí vektor $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ na vektor

$$\mathbf{S}_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha \\ x \sin 2\alpha - y \cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Příklady VI

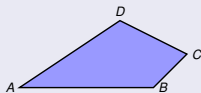
Příklad 2.5

Stejnolehlost neboli též **homotetie** se středem v počátku a s koeficientem podobnosti $0 \neq c \in \mathbb{R}$ je opět lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ s maticí $\mathbf{cl}_2 = \text{diag}(c, c)$.

Příklady VI

Příklad 2.5

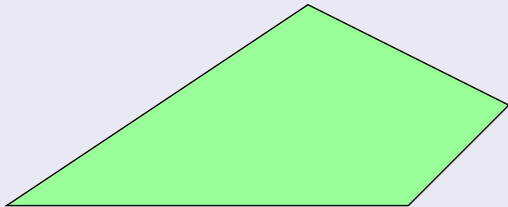
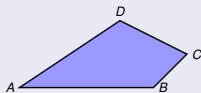
Stejnolehlost *neboli též homotetie se středem v počátku a s koeficientem podobnosti $0 \neq c \in \mathbb{R}$ je opět lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ s maticí $cI_2 = \text{diag}(c, c)$.*



Příklady VI

Příklad 2.5

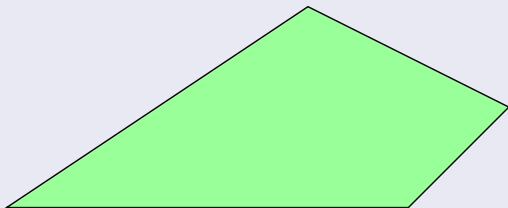
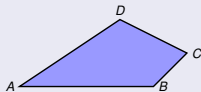
Stejnolehlost neboli též **homotetie** se středem v počátku a s koeficientem podobnosti $0 \neq c \in \mathbb{R}$ je opět lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ s maticí $cI_2 = \text{diag}(c, c)$.



Příklady VI

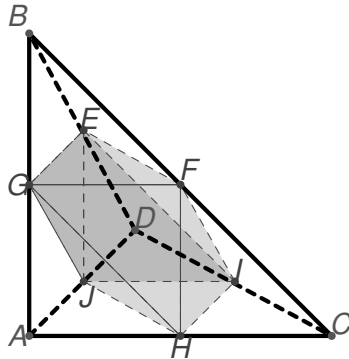
Příklad 2.5

Stejnolehlost neboli též **homotetie** se středem v počátku a s koeficientem podobnosti $0 \neq c \in \mathbb{R}$ je opět lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ s maticí $\mathbf{cI}_2 = \text{diag}(c, c)$.



Tento příklad můžeme evidentním způsobem zevšeobecnit na libovolnou dimenzi n .

Příklady VII



Zkosený hranol

Příklady VIII

Příklad 2.6

Zkosení (*kroucení, stříh*) způsobuje deformace tvarů.

Příklady VIII

Příklad 2.6

Zkosení (*kroucení, stříh*) způsobuje deformace tvarů.

Výsledek transformace vyvolává dojem, jako kdyby objekty byly složeny z mnoha vrstev, které jsou po sobě posouvány.

Příklady VIII

Příklad 2.6

Zkosení (*kroucení, stříh*) způsobuje deformace tvarů.

Výsledek transformace vyvolává dojem, jako kdyby objekty byly složeny z mnoha vrstev, které jsou po sobě posouvány.

Dvě základní transformace jsou zkosení ve směru x a zkosení ve směru y .

Příklady VIII

Příklad 2.6

Zkosení (*kroucení, střih*) způsobuje deformace tvarů.

Výsledek transformace vyvolává dojem, jako kdyby objekty byly složeny z mnoha vrstev, které jsou po sobě posouvány.

Dvě základní transformace jsou zkosení ve směru x a zkosení ve směru y .

Pro zkosení ve směru x s parametrem $a \in K$ se používá transformační matice určená předpisem:

Příklady VIII

Příklad 2.6

Zkosení (*kroucení, stříh*) způsobuje deformace tvarů.

Výsledek transformace vyvolává dojem, jako kdyby objekty byly složeny z mnoha vrstev, které jsou po sobě posouvány.

Dvě základní transformace jsou zkosení ve směru x a zkosení ve směru y .

Pro zkosení ve směru x s parametrem $a \in K$ se používá transformační matice určená předpisem:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ ax + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Příklady VIII

Příklad 2.6

Zkosení (*kroucení, střih*) způsobuje deformace tvarů.

Výsledek transformace vyvolává dojem, jako kdyby objekty byly složeny z mnoha vrstev, které jsou po sobě posouvány.

Dvě základní transformace jsou zkosení ve směru x a zkosení ve směru y .

Pro zkosení ve směru x s parametrem $a \in K$ se používá transformační matice určená předpisem:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ ax + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Je tak definovaná lineární transformace roviny, která posouvá její každou "vodorovnou vrstvu" $\{(x, y); y = s\}$, $s \in K$, o vektor ase_1 .

Příklady VIII

Příklad 2.6

Zkosení (*kroucení, stříh*) způsobuje deformace tvarů.

Výsledek transformace vyvolává dojem, jako kdyby objekty byly složeny z mnoha vrstev, které jsou po sobě posouvány.

Dvě základní transformace jsou zkosení ve směru x a zkosení ve směru y .

Pro zkosení ve směru x s parametrem $a \in K$ se používá transformační matice určená předpisem:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ ax + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Je tak definovaná lineární transformace roviny, která posouvá její každou "vodorovnou vrstvu" $\{(x, y); y = s\}$, $s \in K$, o vektor ase_1 . Analogické lineární transformace fungují i ve vícerozměrných prostorech K^n .

Prostory lineárních zobrazení I

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K .

Prostory lineárních zobrazení I

Nechť U , V jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K .

Uvažme vektorový prostor U^V **všech** zobrazení $f : V \rightarrow U$ s operacemi součtu a skalárního násobku definovanými po složkách.

Prostory lineárních zobrazení I

Nechť U , V jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K .

Uvažme vektorový prostor U^V **všech** zobrazení $f : V \rightarrow U$ s operacemi součtu a skalárního násobku definovanými po složkách.

Pak pro množinu $\mathcal{L}(V, U)$ všech **lineárních** zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ platí $\mathcal{L}(V, U) \subseteq U^V$.

Prostory lineárních zobrazení II

Tvrzení 2.7

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K .

Prostory lineárních zobrazení II

Tvrzení 2.7

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K .

Potom $\mathcal{L}(V, U)$ je lineární podprostor vektorového prostoru U^V .

Prostory lineárních zobrazení II

Tvrzení 2.7

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K .

Potom $\mathcal{L}(V, U)$ je lineární podprostor vektorového prostoru U^V .

Tedy $\mathcal{L}(V, U)$ je vektorový prostor nad K .

Tvrzení 2.8

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = m$, $\dim V = n$.

Prostory lineárních zobrazení II

Tvrzení 2.7

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K .

Potom $\mathcal{L}(V, U)$ je lineární podprostor vektorového prostoru U^V .

Tedy $\mathcal{L}(V, U)$ je vektorový prostor nad K .

Tvrzení 2.8

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = m$, $\dim V = n$.

Potom

$$\mathcal{L}(V, U) \cong K^{m \times n},$$

Prostory lineárních zobrazení II

Tvrzení 2.7

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K .

Potom $\mathcal{L}(V, U)$ je lineární podprostor vektorového prostoru U^V .

Tedy $\mathcal{L}(V, U)$ je vektorový prostor nad K .

Tvrzení 2.8

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = m$, $\dim V = n$.

Potom

$$\mathcal{L}(V, U) \cong K^{m \times n},$$

tedy $\dim \mathcal{L}(V, U) = mn$.

Prostory lineárních zobrazení III

Zvolme bázi α v prostoru U a β v prostoru V .

Prostory lineárních zobrazení III

Zvolme bázi α v prostoru U a β v prostoru V .

Na matici $(\varphi)_{\alpha,\beta}$ se můžeme dívat jako na souřadnice vektoru $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ v prostoru $K^{m \times n}$, vzhledem na dvojici bazí β, α .

Prostory lineárních zobrazení III

Zvolme bázi α v prostoru U a β v prostoru V .

Na matici $(\varphi)_{\alpha,\beta}$ se můžeme dívat jako na souřadnice vektoru $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ v prostoru $K^{m \times n}$, vzhledem na dvojici bazí β, α .

Lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow K$ z vektorového prostoru V do tělesa K se nazývá **lineární funkcionál** nebo též **lineární forma** na V .

Prostory lineárních zobrazení III

Zvolme bázi α v prostoru U a β v prostoru V .

Na matici $(\varphi)_{\alpha,\beta}$ se můžeme dívat jako na souřadnice vektoru $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ v prostoru $K^{m \times n}$, vzhledem na dvojici bazí β, α .

Lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow K$ z vektorového prostoru V do tělesa K se nazývá **lineární funkcionál** nebo též **lineární forma** na V .

Vektorový prostor $\mathcal{L}(V, K)$ všech lineárních forem na V se nazývá **duální prostor** nebo jen krátce **duál** vektorového prostoru V .

Prostory lineárních zobrazení III

Zvolme bázi α v prostoru U a β v prostoru V .

Na matici $(\varphi)_{\alpha,\beta}$ se můžeme dívat jako na souřadnice vektoru $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ v prostoru $K^{m \times n}$, vzhledem na dvojici bazí β, α .

Lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow K$ z vektorového prostoru V do tělesa K se nazývá **lineární funkcionál** nebo též **lineární forma** na V .

Vektorový prostor $\mathcal{L}(V, K)$ všech lineárních forem na V se nazývá **duální prostor** nebo jen krátce **duál** vektorového prostoru V .

Budeme používat označení $\mathcal{L}(V, K) = V^*$.

Prostory lineárních zobrazení IV

Pokud v tělese K budeme vždy uvažovat pouze kanonickou bázi sestávající z jediného vektoru $1 \in K$,

Prostory lineárních zobrazení IV

Pokud v tělese K budeme vždy uvažovat pouze kanonickou bázi sestávající z jediného vektoru $1 \in K$,

libovolná báze β v konečně rozměrném prostoru V určuje lineární izomorfismus $V^* \rightarrow V$ daný předpisem $\varphi \mapsto (\varphi)_{1,\beta}$.

Prostory lineárních zobrazení IV

Pokud v tělese K budeme vždy uvažovat pouze kanonickou bázi sestávající z jediného vektoru $1 \in K$,

libovolná báze β v konečně rozměrném prostoru V určuje lineární izomorfismus $V^* \rightarrow V$ daný předpisem $\varphi \mapsto (\varphi)_{1,\beta}$.

Platí tedy

Tvrzení 2.9

Pro libovolný konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K platí $V^ \cong V$.*

Prostory lineárních zobrazení V

Matice $(\varphi)_{1,\beta}$ lineárního funkcionálu $\varphi : V \rightarrow K$ je řádkový vektor z prostoru $K^{1 \times n}$.

Prostory lineárních zobrazení V

Matice $(\varphi)_{1,\beta}$ lineárního funkcionálu $\varphi : V \rightarrow K$ je řádkový vektor z prostoru $K^{1 \times n}$.

Při volbě kanonické báze ε v sloupcovém prostoru $K^{n \times 1}$ můžeme řádkový prostor $K^{1 \times n}$ ztotožnit s duálem $(K^{n \times 1})^*$ sloupcového prostoru $K^{n \times 1}$.

Prostory lineárních zobrazení V

Matice $(\varphi)_{1,\beta}$ lineárního funkcionálu $\varphi : V \rightarrow K$ je řádkový vektor z prostoru $K^{1 \times n}$.

Při volbě kanonické báze ε v sloupcovém prostoru $K^{n \times 1}$ můžeme řádkový prostor $K^{1 \times n}$ ztotožnit s duálem $(K^{n \times 1})^*$ sloupcového prostoru $K^{n \times 1}$.

Izomorfismus konečně rozměrného prostoru V a jeho duálu V^* závisí od výběru báze ve V .

Prostory lineárních zobrazení VI

Pro libovolný vektorový prostor V můžeme definovat kanonické,

Prostory lineárních zobrazení VI

Pro libovolný vektorový prostor V můžeme definovat kanonické,
tj. od výběru báze nezávislé zobrazení z prostoru V do jeho
druhého duálu V^{**}

Prostory lineárních zobrazení VI

Pro libovolný vektorový prostor V můžeme definovat kanonické,

tj. od výběru báze nezávislé zobrazení z prostoru V do jeho
druhého duálu V^{**}

dané předpisem $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$, kde

Prostory lineárních zobrazení VI

Pro libovolný vektorový prostor V můžeme definovat kanonické,

tj. od výběru báze nezávislé zobrazení z prostoru V do jeho
druhého duálu V^{**}

dané předpisem $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$, kde

$$\widehat{\mathbf{x}}(\varphi) = \varphi(\mathbf{x})$$

pro $\mathbf{x} \in V$, $\varphi \in V^*$.

Prostory lineárních zobrazení VII

Tvrzení 2.10

Nech V je vektorový prostor nad tělesem K .

Prostory lineárních zobrazení VII

Tvrzení 2.10

Nech V je vektorový prostor nad tělesem K .

Potom

*(a) $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ je injektivní lineární zobrazení $V \rightarrow V^{**}$;*

Prostory lineárních zobrazení VII

Tvrzení 2.10

Nech V je vektorový prostor nad tělesem K .

Potom

- (a) $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ je injektivní lineární zobrazení $V \rightarrow V^{**}$;*
- (b) pokud je V konečně rozměrný, pak $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ je lineární izomorfismus $V \rightarrow V^{**}$.*

Prostory lineárních zobrazení VIII

Každý vektor $\mathbf{x} \in V$ definuje lineární funkcionál $\hat{\mathbf{x}}$ na duálním prostoru V^* .

Prostory lineárních zobrazení VIII

Každý vektor $\mathbf{x} \in V$ definuje lineární funkcionál $\hat{\mathbf{x}}$ na duálním prostoru V^* .

Konečně rozměrný vektorový prostor V můžeme přiřazením $\mathbf{x} \mapsto \hat{\mathbf{x}}$ **přirozeně** ztotožnit s duálem prostoru V^* .

Obsah

- 1 Jádro a obraz lineárního zobrazení
- 2 Matice lineárního zobrazení
- 3 Matice přechodu
 - Definice matice přechodu
 - Vlastnosti matice přechodu
 - Výpočet matice přechodu
 - Matice lineárního zobrazení
 - Matice lineárního zobrazení vzhledem na různé báze
- 4 Skeletní rozklad matic

Definice matice přechodu I

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K a $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jsou jeho dvě báze.

Maticí přechodu z báze β do báze α nazýváme matici identického zobrazení $\text{id}_V : V \rightarrow V$ vzhledem na bázi β , α , kterou značíme $\mathbf{P}_{\alpha, \beta}$. Tedy

$$\mathbf{P}_{\alpha, \beta} = (\text{id}_V)_{\alpha, \beta}.$$

Definice matice přechodu II

Sloupce matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha, \beta}$ jsou tvořeny souřadnicemi vektorů báze β vzhledem na bázi α ,

Definice matice přechodu II

Sloupce matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ jsou tvořeny souřadnicemi vektorů báze β vzhledem na bázi α ,

t.j. $\mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\alpha,\beta}) = (\mathbf{v}_j)_\alpha$ pro $1 \leq j \leq n$.

Definice matice přechodu II

Sloupce matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ jsou tvořeny souřadnicemi vektorů báze β vzhledem na bázi α ,

t.j. $\mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\alpha,\beta}) = (\mathbf{v}_j)_\alpha$ pro $1 \leq j \leq n$.

Tedy

$$\mathbf{P}_{\alpha,\beta} = ((\mathbf{v}_1)_\alpha, (\mathbf{v}_2)_\alpha, \dots, (\mathbf{v}_n)_\alpha),$$

Definice matice přechodu II

Sloupce matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ jsou tvořeny souřadnicemi vektorů báze β vzhledem na bázi α ,

t.j. $\mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\alpha,\beta}) = (\mathbf{v}_j)_\alpha$ pro $1 \leq j \leq n$.

Tedy

$$\mathbf{P}_{\alpha,\beta} = ((\mathbf{v}_1)_\alpha, (\mathbf{v}_2)_\alpha, \dots, (\mathbf{v}_n)_\alpha),$$

a tato matice je jednoznačně určená podmínkou transformace souřadnic

$$(\mathbf{x})_\alpha = \mathbf{P}_{\alpha,\beta} \cdot (\mathbf{x})_\beta$$

pro libovolné $\mathbf{x} \in V$.

Definice matice přechodu III

Pokud do rovnosti $\mathbf{x} = \alpha \cdot (\mathbf{x})_\alpha$ budeme za \mathbf{x} postupně dosazovat vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ bázi β , s využitím vztahu pro sloupce součinu matic dostaneme

Definice matice přechodu III

Pokud do rovnosti $\mathbf{x} = \alpha \cdot (\mathbf{x})_\alpha$ budeme za \mathbf{x} postupně dosazovat vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ bázi β , s využitím vztahu pro sloupce součinu matic dostaneme

$$\mathbf{v}_j = \alpha \cdot (\mathbf{v}_j)_\alpha = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\alpha,\beta}) = \mathbf{s}_j(\alpha \cdot \mathbf{P}_{\alpha,\beta})$$

pro každé $1 \leq j \leq n$.

Definice matice přechodu III

Pokud do rovnosti $\mathbf{x} = \alpha \cdot (\mathbf{x})_\alpha$ budeme za \mathbf{x} postupně dosazovat vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ bázi β , s využitím vztahu pro sloupce součinu matic dostaneme

$$\mathbf{v}_j = \alpha \cdot (\mathbf{v}_j)_\alpha = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\alpha,\beta}) = \mathbf{s}_j(\alpha \cdot \mathbf{P}_{\alpha,\beta})$$

pro každé $1 \leq j \leq n$.

Tedy

$$\alpha \cdot \mathbf{P}_{\alpha,\beta} = \beta.$$

Vlastnosti matice přechodu I

Tvrzení 3.1

Nechť α, β jsou báze n -rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K .

Vlastnosti matice přechodu I

Tvrzení 3.1

Nechť α, β jsou báze n -rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K .

Potom pro libovolnou matici $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

Vlastnosti matice přechodu I

Tvrzení 3.1

Nechť α, β jsou báze n -rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K .

Potom pro libovolnou matici $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (i) $\mathbf{P} = (\text{id}_V)_{\alpha, \beta}$, t. j. \mathbf{P} je matice přechodu z báze β do báze α ;*

Vlastnosti matice přechodu I

Tvrzení 3.1

Nechť α, β jsou báze n -rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K .

Potom pro libovolnou matici $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (i) $\mathbf{P} = (\text{id}_V)_{\alpha, \beta}$, t. j. \mathbf{P} je matice přechodu z báze β do báze α ;*
- (ii) $(\mathbf{x})_{\alpha} = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{x})_{\beta}$ pro každé $\mathbf{x} \in V$;*

Vlastnosti matice přechodu I

Tvrzení 3.1

Nechť α, β jsou báze n -rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K .

Potom pro libovolnou matici $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (i) $\mathbf{P} = (\text{id}_V)_{\alpha, \beta}$, t. j. \mathbf{P} je matice přechodu z báze β do báze α ;*
- (ii) $(\mathbf{x})_{\alpha} = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{x})_{\beta}$ pro každé $\mathbf{x} \in V$;*
- (iii) $\alpha \cdot \mathbf{P} = \beta$.*

Vlastnosti matice přechodu II

Tvrzení 3.2

Nechť α, β, γ jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K .

Vlastnosti matice přechodu II

Tvrzení 3.2

Nechť α, β, γ jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K .

Potom

$$\mathbf{P}_{\alpha, \alpha} = \mathbf{I}_n,$$

Vlastnosti matice přechodu II

Tvrzení 3.2

Nechť α, β, γ jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K .

Potom

$$\mathbf{P}_{\alpha, \alpha} = \mathbf{I}_n,$$

$$\mathbf{P}_{\beta, \alpha} = \mathbf{P}_{\alpha, \beta}^{-1},$$

Vlastnosti matice přechodu II

Tvrzení 3.2

Nechť α, β, γ jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K .

Potom

$$\mathbf{P}_{\alpha,\alpha} = \mathbf{I}_n,$$

$$\mathbf{P}_{\beta,\alpha} = \mathbf{P}_{\alpha,\beta}^{-1},$$

$$\mathbf{P}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{P}_{\beta,\gamma} = \mathbf{P}_{\alpha,\gamma}.$$

Vlastnosti matice přechodu II

Tvrzení 3.2

Nechť α, β, γ jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K .

Potom

$$\mathbf{P}_{\alpha,\alpha} = \mathbf{I}_n,$$

$$\mathbf{P}_{\beta,\alpha} = \mathbf{P}_{\alpha,\beta}^{-1},$$

$$\mathbf{P}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{P}_{\beta,\gamma} = \mathbf{P}_{\alpha,\gamma}.$$

Z druhé z uvedených podmínek vidíme, že matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ je vždy **regulární**.

Vlastnosti matice přechodu II

Tvrzení 3.2

Nechť α, β, γ jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K .

Potom

$$\mathbf{P}_{\alpha,\alpha} = \mathbf{I}_n,$$

$$\mathbf{P}_{\beta,\alpha} = \mathbf{P}_{\alpha,\beta}^{-1},$$

$$\mathbf{P}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{P}_{\beta,\gamma} = \mathbf{P}_{\alpha,\gamma}.$$

Z druhé z uvedených podmínek vidíme, že matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ je vždy **regulární**.

Naopak, každá regulární matice $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ je maticí přechodu mezi vhodnou dvojicí bazí.

Vlastnosti matice přechodu III

Tvrzení 3.3

Nechť V je n -rozměrný vektorový prostor nad K a $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ je libovolná regulární matice.

Vlastnosti matice přechodu III

Tvrzení 3.3

Nechť V je n -rozměrný vektorový prostor nad K a $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ je libovolná regulární matice.

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je nějaká báze ve V . Položme $\mathbf{v}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P})$, $\mathbf{w}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}^{-1})$ pro $1 \leq j \leq n$, a dále

$$\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P},$$

Vlastnosti matice přechodu III

Tvrzení 3.3

Nechť V je n -rozměrný vektorový prostor nad K a $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ je libovolná regulární matice.

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je nějaká báze ve V . Položme $\mathbf{v}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P})$, $\mathbf{w}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}^{-1})$ pro $1 \leq j \leq n$, a dále

$$\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}, \quad \gamma = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

Vlastnosti matice přechodu III

Tvrzení 3.3

Nechť V je n -rozměrný vektorový prostor nad K a $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ je libovolná regulární matice.

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je nějaká báze ve V . Položme $\mathbf{v}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P})$, $\mathbf{w}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}^{-1})$ pro $1 \leq j \leq n$, a dále

$$\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}, \quad \gamma = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

Potom \mathbf{P} je maticí přechodu z báze β do báze α a zároveň z báze α do báze γ ,

Vlastnosti matice přechodu III

Tvrzení 3.3

Nechť V je n -rozměrný vektorový prostor nad K a $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ je libovolná regulární matice.

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je nějaká báze ve V . Položme $\mathbf{v}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P})$, $\mathbf{w}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}^{-1})$ pro $1 \leq j \leq n$, a dále

$$\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}, \quad \gamma = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

Potom \mathbf{P} je maticí přechodu z báze β do báze α a zároveň z báze α do báze γ , t. j.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\alpha, \beta} = \mathbf{P}_{\gamma, \alpha}.$$

Vlastnosti matice přechodu IV

Speciálně, \mathbf{P} je maticí přechodu z báze $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}))$ do báze $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ v K^n

Vlastnosti matice přechodu IV

Speciálně, \mathbf{P} je maticí přechodu z báze $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}))$ do báze $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ v K^n

a taktéž z báze ε do báze $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}^{-1}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}^{-1}))$.

Vlastnosti matice přechodu IV

Speciálně, \mathbf{P} je maticí přechodu z báze $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}))$ do báze $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ v K^n

a taktéž z báze ε do báze $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}^{-1}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}^{-1}))$.

Tvrzení 3.4

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jsou dvě báze sloupcového vektorového prostoru K^n . Potom $\mathbf{P}_{\alpha, \beta} = \alpha^{-1} \cdot \beta$.

Výpočet matice přechodu I

**Návod na výpočet matice přechodu pro báze α, β
vektorového prostoru K^n**

Výpočet matice přechodu I

**Návod na výpočet matice přechodu pro báze α, β
vektorového prostoru K^n**

$$(\alpha | \beta) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n | \mathbf{P}_{\alpha, \beta}) = (\varepsilon | \alpha^{-1} \cdot \beta).$$

Matice LZ vzhledem na různé báze I

Věta 3.5

Nechť V_1, V_2 jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K , $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ je lineární zobrazení, α_1, β_1 jsou dvě báze prostoru V_1 a α_2, β_2 jsou dvě báze prostoru V_2 .

Matice LZ vzhledem na různé báze I

Věta 3.6

Nechť V_1, V_2 jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K , $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ je lineární zobrazení, α_1, β_1 jsou dvě báze prostoru V_1 a α_2, β_2 jsou dvě báze prostoru V_2 .

Matice LZ vzhledem na různé báze I

Věta 3.6

Nechť V_1, V_2 jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K , $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ je lineární zobrazení, α_1, β_1 jsou dvě báze prostoru V_1 a α_2, β_2 jsou dvě báze prostoru V_2 .

Potom

$$(\varphi)_{\beta_2, \beta_1} = \mathbf{P}_{\beta_2, \alpha_2} \cdot (\varphi)_{\alpha_2, \alpha_1} \cdot \mathbf{P}_{\alpha_1, \beta_1}.$$

Matice LZ vzhledem na různé báze II

Výše uvedenou transformační formuli si můžeme zapamatovat pomocí následujícího diagramu:

$$\begin{array}{ccc} (V_1, \alpha_1) & \xrightarrow{\mathbf{A}} & (V_2, \alpha_2) \\ \uparrow \mathbf{P}_{\alpha_1, \beta_1} & & \downarrow \mathbf{P}_{\beta_2, \alpha_2} \\ (V_1, \beta_1) & \xrightarrow{\mathbf{B}} & (V_2, \beta_2) \end{array}$$

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Příklad 3.7

Nechť $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ je lineární zobrazení a α, β jsou nějaké báze prostorů K^m resp. K^n .

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Příklad 3.7

Nechť $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ je lineární zobrazení a α, β jsou nějaké báze prostorů K^m resp. K^n .

Označme $\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha, \beta}$, $\mathbf{M} = (\varphi)_{\epsilon^{(m)}, \epsilon^{(n)}}$ matice zobrazení φ vzhledem k bazím β, α resp. vzhledem ke kanonickým bazím $\epsilon^{(n)}, \epsilon^{(m)}$.

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Příklad 3.7

Nechť $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ je lineární zobrazení a α, β jsou nějaké báze prostorů K^m resp. K^n .

Označme $\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha, \beta}$, $\mathbf{M} = (\varphi)_{\varepsilon^{(m)}, \varepsilon^{(n)}}$ matice zobrazení φ vzhledem k bazím β, α resp. vzhledem ke kanonickým bazím $\varepsilon^{(n)}, \varepsilon^{(m)}$.

Pak platí:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_{\alpha, \varepsilon^{(m)}} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}_{\varepsilon^{(n)}, \beta}$$

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Příklad 3.7

Nechť $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ je lineární zobrazení a α, β jsou nějaké báze prostorů K^m resp. K^n .

Označme $\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha, \beta}$, $\mathbf{M} = (\varphi)_{\varepsilon^{(m)}, \varepsilon^{(n)}}$ matice zobrazení φ vzhledem k bazím β, α resp. vzhledem ke kanonickým bazím $\varepsilon^{(n)}, \varepsilon^{(m)}$.

Pak platí:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_{\alpha, \varepsilon^{(m)}} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}_{\varepsilon^{(n)}, \beta}$$

a

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}_{\varepsilon^{(m)}, \alpha} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{\beta, \varepsilon^{(n)}}.$$

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Pokud ztotožníme každou bázi s regulární maticí, jejíž sloupce jsou vektory této báze, tak výše uvedené rovnosti získají tvar

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Pokud ztotožníme každou bázi s regulární maticí, jejíž sloupce jsou vektory této báze, tak výše uvedené rovnosti získají tvar

$$\mathbf{A} = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{I}_m \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{I}_n^{-1} \cdot \beta = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \beta,$$

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Pokud ztotožníme každou bázi s regulární maticí, jejíž sloupce jsou vektory této báze, tak výše uvedené rovnosti získají tvar

$$\mathbf{A} = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{I}_m \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{I}_n^{-1} \cdot \beta = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \beta,$$

a

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}_m^{-1} \cdot \alpha \cdot \mathbf{A} \cdot \beta^{-1} \cdot \mathbf{I}_n = \alpha \cdot \mathbf{A} \cdot \beta^{-1}.$$

Matice LZ vzhledem na různé báze IV

Věta 3.8

Nechť U je m -rozměrný a V je n -rozměrný vektorový prostor nad tělesem K .

Matice LZ vzhledem na různé báze IV

Věta 3.8

Nechť U je m -rozměrný a V je n -rozměrný vektorový prostor nad tělesem K .

Potom pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

Matice LZ vzhledem na různé báze IV

Věta 3.8

Nechť U je m -rozměrný a V je n -rozměrný vektorový prostor nad tělesem K .

Potom pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (i) \mathbf{A}, \mathbf{B} jsou matice stejného lineárního zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ vzhledem na nějaké dvě dvojice bazí prostorů U, V ;*

Matice LZ vzhledem na různé báze IV

Věta 3.8

Nechť U je m -rozměrný a V je n -rozměrný vektorový prostor nad tělesem K .

Potom pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (i) \mathbf{A}, \mathbf{B} jsou matice stejného lineárního zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ vzhledem na nějaké dvě dvojice bazí prostorů U, V ;*
- (ii) existují regulární matice $\mathbf{P} \in K^{m \times m}, \mathbf{Q} \in K^{n \times n}$ tak, že $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$;*

Matice LZ vzhledem na různé báze IV

Věta 3.8

Nechť U je m -rozměrný a V je n -rozměrný vektorový prostor nad tělesem K .

Potom pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (i) \mathbf{A}, \mathbf{B} jsou matice stejného lineárního zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ vzhledem na nějaké dvě dvojice bazí prostorů U, V ;*
- (ii) existují regulární matice $\mathbf{P} \in K^{m \times m}, \mathbf{Q} \in K^{n \times n}$ tak, že $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$;*
- (iii) $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$.*

Matice LZ vzhledem na různé báze V

Věta 3.9

Pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad tělesem K můžeme zvolit bázi β prostoru V a bázi α prostoru U tak, že

Matice LZ vzhledem na různé báze V

Věta 3.9

Pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad tělesem K můžeme zvolit bázi β prostoru V a bázi α prostoru U tak, že φ má vzhledem k bazím β, α matici v blokovém tvaru

$$(\varphi)_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_h & \mathbf{0}_{h, n-h} \\ \mathbf{0}_{m-h, h} & \mathbf{0}_{m-h, n-h} \end{pmatrix},$$

Matice LZ vzhledem na různé báze V

Věta 3.9

Pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad tělesem K můžeme zvolit bázi β prostoru V a bázi α prostoru U tak, že

φ má vzhledem k bazím β, α matici v blokovém tvaru

$$(\varphi)_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_h & \mathbf{0}_{h, n-h} \\ \mathbf{0}_{m-h, h} & \mathbf{0}_{m-h, n-h} \end{pmatrix},$$

kde $n = \dim V$, $m = \dim U$ a $h = h(\varphi)$.

Obsah

- 1 Jádro a obraz lineárního zobrazení
- 2 Matice lineárního zobrazení

- 3 Matice přechodu
- 4 **Skeletní rozklad matic**
 - Definice skeletního rozkladu matice

Definice skeletního rozkladu matice I

Uvažme matici A typu $m \times n$ hodnosti $r \geq 1$ nad tělesem K .

Definice skeletního rozkladu matice I

Uvažme matici A typu $m \times n$ hodnosti $r \geq 1$ nad tělesem K .
Napišme nějakou bázi podprostoru ImA prostoru K^m do
sloupců matice B .

Definice skeletního rozkladu matice I

Uvažme matici A typu $m \times n$ hodnosti $r \geq 1$ nad tělesem K .

Napišme nějakou bázi podprostoru ImA prostoru K^m do sloupců matice B .

Každý sloupec \mathbf{a}_j matice A je lineární kombinací sloupců matice B .

Definice skeletního rozkladu matice I

Uvažme matici A typu $m \times n$ hodnosti $r \geq 1$ nad tělesem K .

Napišme nějakou bázi podprostoru ImA prostoru K^m do sloupců matice B .

Každý sloupec \mathbf{a}_j matice A je lineární kombinací sloupců matice B .

Platí tedy $\mathbf{a}_j = B\mathbf{c}_j$ pro nějaký vektor $\mathbf{c}_j \in K^r$.

Definice skeletního rozkladu matice I

Uvažme matici A typu $m \times n$ hodnosti $r \geq 1$ nad tělesem K .

Napišme nějakou bázi podprostoru ImA prostoru K^m do sloupců matice B .

Každý sloupec \mathbf{a}_j matice A je lineární kombinací sloupců matice B .

Platí tedy $\mathbf{a}_j = B\mathbf{c}_j$ pro nějaký vektor $\mathbf{c}_j \in K^r$.

Označíme-li tedy $C = (\mathbf{c}_1 | \dots | \mathbf{c}_n)$, máme rozklad $A = BC$, kde B je matice typu $m \times r$ a C je matice typu $r \times n$.

Definice skeletního rozkladu matice I

Uvažme matici A typu $m \times n$ hodnosti $r \geq 1$ nad tělesem K .

Napišme nějakou bázi podprostoru ImA prostoru K^m do sloupců matice B .

Každý sloupec \mathbf{a}_j matice A je lineární kombinací sloupců matice B .

Platí tedy $\mathbf{a}_j = B\mathbf{c}_j$ pro nějaký vektor $\mathbf{c}_j \in K^r$.

Označíme-li tedy $C = (\mathbf{c}_1 | \dots | \mathbf{c}_n)$, máme rozklad $A = BC$, kde B je matice typu $m \times r$ a C je matice typu $r \times n$.

Takovému rozkladu říkáme **skeletní rozklad**.

Definice skeletního rozkladu matice I

Uvažme matici A typu $m \times n$ hodnosti $r \geq 1$ nad tělesem K .

Napišme nějakou bázi podprostoru ImA prostoru K^m do sloupců matice B .

Každý sloupec \mathbf{a}_j matice A je lineární kombinací sloupců matice B .

Platí tedy $\mathbf{a}_j = B\mathbf{c}_j$ pro nějaký vektor $\mathbf{c}_j \in K^r$.

Označíme-li tedy $C = (\mathbf{c}_1 | \dots | \mathbf{c}_n)$, máme rozklad $A = BC$, kde B je matice typu $m \times r$ a C je matice typu $r \times n$.

Takovému rozkladu říkáme **skeletní rozklad**.

Za sloupce matice B můžeme vzít **bázové sloupce** matice A , tj. ty sloupce matice A určené vedoucími prvky matice řádkově ekvivalentní s maticí A , která je v (redukovaném) stupňovitém tvaru.

Skeletní rozklad matic II

Skeletní rozklad se hodí pro ukládání matic nízkých hodnotí a počítání s nimi.

Skeletní rozklad matic II

Skeletní rozklad se hodí pro ukládání matic nízkých hodnotí a počítání s nimi.

Věta 4.1

Libovolná matice A typu $m \times n$ nad tělesem K s hodnotí $r \geq 1$ je rovná součinu $A = BC$, kde B je matice typu $m \times r$ tvořená bázovými sloupci matice A (v pořadí, v jakém se vyskytují v A) a C je matice typu $r \times n$ tvořená nenulovými řádky v redukovaném stupňovitém tvaru D matice A .

Skeletní rozklad matic II

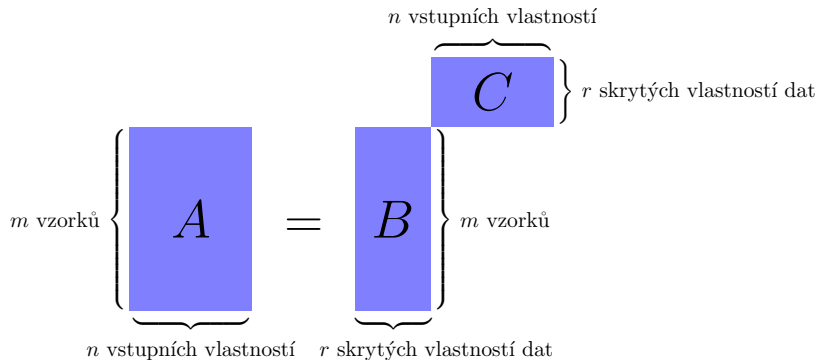
Skeletní rozklad se hodí pro ukládání matic nízkých hodnotí a počítání s nimi.

Věta 4.1

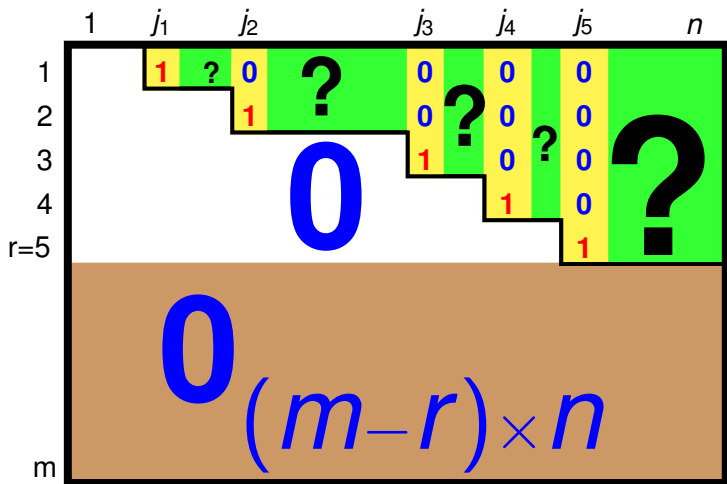
Libovolná matice A typu $m \times n$ nad tělesem K s hodnotí $r \geq 1$ je rovná součinu $A = BC$, kde B je matice typu $m \times r$ tvořená bázovými sloupci matice A (v pořadí, v jakém se vyskytují v A) a C je matice typu $r \times n$ tvořená nenulovými řádky v redukovaném stupňovitém tvaru D matice A .

Věta 4.2

Pro každou matici A existuje právě jedna matice J v redukovaném stupňovitém tvaru taková, že J lze získat z A elementárními řádkovými úpravami.

Skeletní rozklad matic $A = B \cdot C$ III

Skeletní rozklad matic III



Redukovaný stupňovitý tvar

Skeletní rozklad matic IV

