8. JÁDRO, OBRAZ a MATICE LINEÁRNÍHO ZOBRAZENÍ

Jan Paseka

Ústav matematiky a statistiky
Masarykova univerzita

4. listopadu 2024

Obsah

Abstrakt

V této kapitole blíže prozkoumáme pojem ***lineárního zobrazení***.

To nám umožní ***porovnávat*** struktury různých vektorových prostorů nad týmž tělesem.

Budeme studovat pojem jádra, matice lineárního zobrazení a matice přechodu.

Obsah

Vlastnosti lineárního zobrazení I

Významné vlastnosti lineárních zobrazení jsou:

kompozice (složení) lineárních zobrazení je opět lineární zobrazení

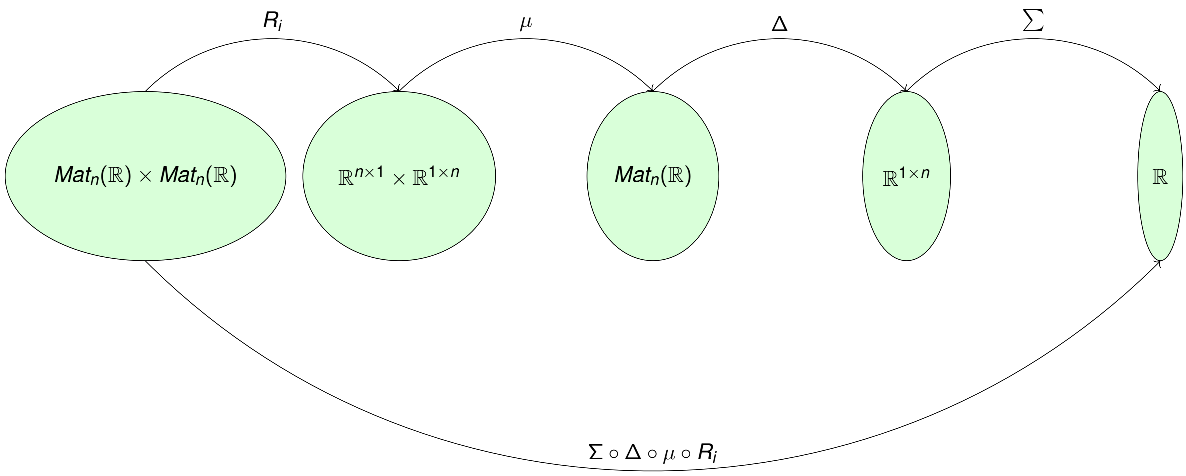
a obrazy i vzory lineárních podprostorů v lineárních zobrazeních jsou též lineární podprostory.

Tvrzení 1.1

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\psi : W \to V$, $\varphi : V \to U$ jsou lineární zobrazení.

Potom i jejich složení $\varphi \circ \psi : W \to U$ je lineární zobrazení.

Vlastnosti lineárního zobrazení II



$R_i(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{s}_i(\mathbf{A}), \mathbf{r}_i(\mathbf{B}))$, $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, $\Delta(\mathbf{C}) = (c_{11}, \ldots, c_{nn})$, $\Sigma(\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^{n} z_j$, $(\Sigma \circ \Delta \circ \mu \circ R_i)(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} b_{ij}$.

Vlastnosti lineárního zobrazení III

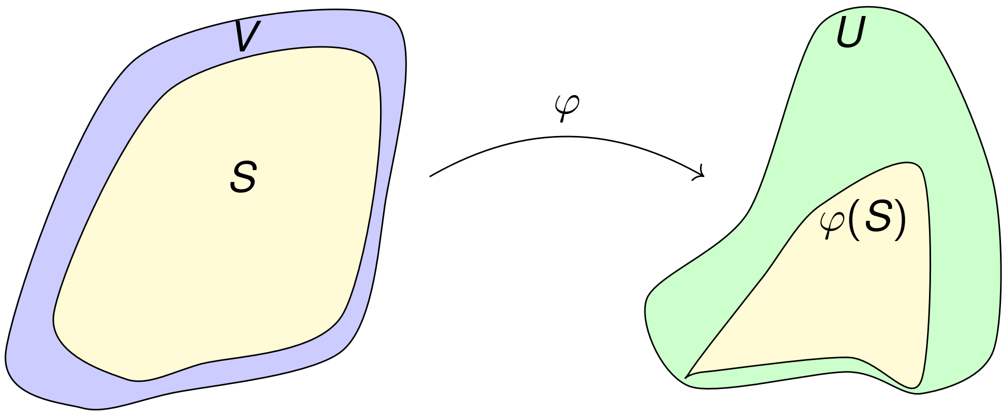
Tvrzení 1.2

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení.

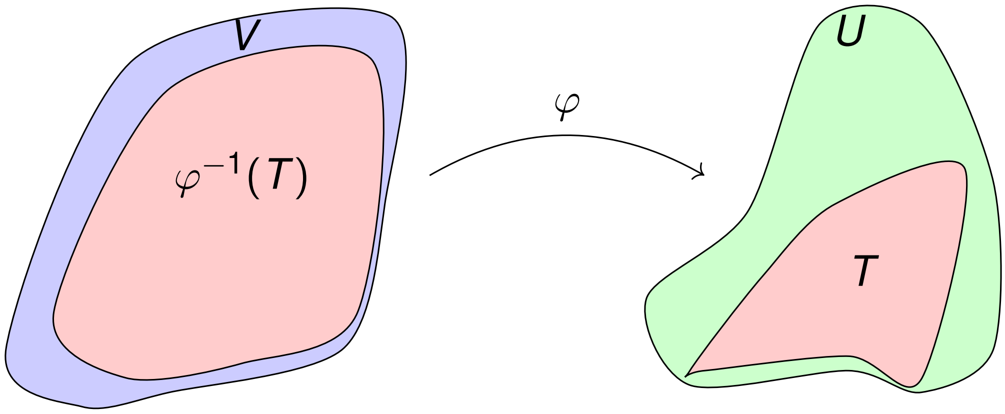
(a) *Je-li S lineární podprostor prostoru V, tak i $\varphi(S)$ je lineární podprostor prostoru U.*

(b) *Je-li T lineární podprostor prostoru U, tak $\varphi^{-1}(T)$ je lineární podprostor prostoru V.*

Vlastnosti lineárního zobrazení IV



Vlastnosti lineárního zobrazení V



Jádro I

Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K.

Jeho ***jádrem*** nazýváme množinu

$$\mathrm{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in V;\ \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Obrazem lineárního zobrazení φ nazývame množinu

$$\mathrm{Im}\varphi = \varphi(V) = \{\varphi(\mathbf{x});\ \mathbf{x} \in V\}.$$

Výše zavedené označení pochází z anglických slov ***kernel*** a ***image***.

Jádro II

Protože $\{\mathbf{0}\}$ je lineární podprostor prostoru U a V je lineární podprostor prostoru V, jako speciální případ tvrzení o vzoru a obrazu lineárního zobrazení dostáváme následující výsledek.

Tvrzení 1.3

Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory nad tělesem K.
Potom $\mathrm{Ker}\varphi$ a $\mathrm{Im}\varphi$ jsou lineární podprostory.

Pomocí pojmů jádra a obrazu můžeme charakterizovat injektivní resp. surjektivní lineární zobrazení.

Věta 1.4

Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení. Potom

(a) *φ je injektivní právě tehdy, když $\mathrm{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$;*

(b) *φ je surjektivní právě tehdy, když $\mathrm{Im}\varphi = U$.*

Abstrakt Matice LZ Skeletní rozklad Vlastnosti Hodnost
Jádro a obraz Matice přechodu Jádro a obraz Izomorfismy

Hodnost lineárního zobrazení I

Věta 1.5

Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení, přičemž vektorový prostor V je konečně rozměrný.

Potom i $\mathrm{Ker}\varphi$ a $\mathrm{Im}\varphi$ jsou konečně rozměrné prostory a platí

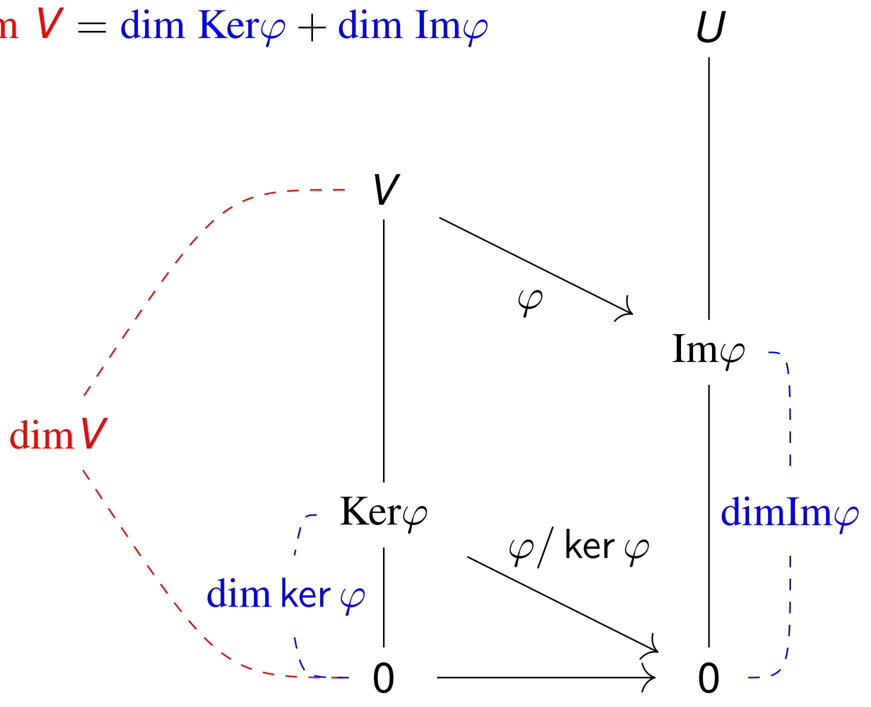
$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\varphi + \dim \mathrm{Im}\varphi.$$

Dimenzi obrazu $\mathrm{Im}\varphi$ nazýváme ***hodností*** lineárního zobrazení φ a značíme ji

$$h(\varphi) = \dim \mathrm{Im}\varphi.$$

Hodnost lineárního zobrazení II

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi$$



Hodnost lineárního zobrazení III

Lineární zobrazení $\varphi : V \to V$ vektorového prostoru V do sebe nazýváme ***lineárním operátorem***

neboli ***lineární transformací***.

Důsledek 1.6

Nechť $\varphi : V \to V$ je lineární transformace konečně rozměrného vektorového prostoru V.

Potom φ je injektivní právě tehdy, když je surjektivní.

Lineární izomorfismy I

Bijektivní lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ mezi vektorovými prostory V, U nad tímž tělesem K nazýváme ***lineární izomorfismus***.

Říkáme, že vektorové prostory V, U jsou ***lineárně izomorfní*** nebo jen krátce ***izomorfní*** a píšeme $V \cong U$,

pokud existuje nějaký lineární izomorfismus $\varphi : V \to U$.

Tvrzení 1.7

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad tělesem K.

(a) $\mathrm{id}_V : V \to V$ *je lineární izomorfismus.*

(b) *Je-li $\varphi : V \to U$ lineární izomorfismus, pak i $\varphi^{-1} : U \to V$ je lineární izomorfismus.*

(c) *Jsou-li $\psi : W \to V$, $\varphi : V \to U$ lineární izomorfismy, pak i $\varphi \circ \psi : W \to U$ je lineární izomorfismus.*

Lineární izomorfismy II

Z právě dokázaného tvrzení okamžitě vyplývá následující důsledek.

Důsledek 1.8

Pro libovolné vektorové prostory U, V, W nad tímž tělesem K platí:

(a) $V \cong V$;

(b) $V \cong U \Rightarrow U \cong V$;

(c) $W \cong V \;\&\; V \cong U \Rightarrow W \cong U$.

Říkáme, že vztah izomorfnosti $\cong$ je ***reflexivní***, ***symetrický*** a ***tranzitivní***, tj. je vztahem ***ekvivalence***.

Z formálního hlediska s ním můžeme pracovat podobně jako se vztahem rovnosti $=$.

Lineární izomorfismy III

Příklad 1.9

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor nad tělesem K, $\dim V = n$ a $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je nějaká jeho báze.

Potom souřadnicové zobrazení $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\beta$ je lineární izomorfizmus $V \to K^n$.

Platí, že typ izomorfismu daného konečně rozměrného prostoru je jednoznačně určený jeho dimenzí.

Věta 1.10

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K.
Potom

$$V \cong U \;\Leftrightarrow\; \dim\, V = \dim\, U.$$

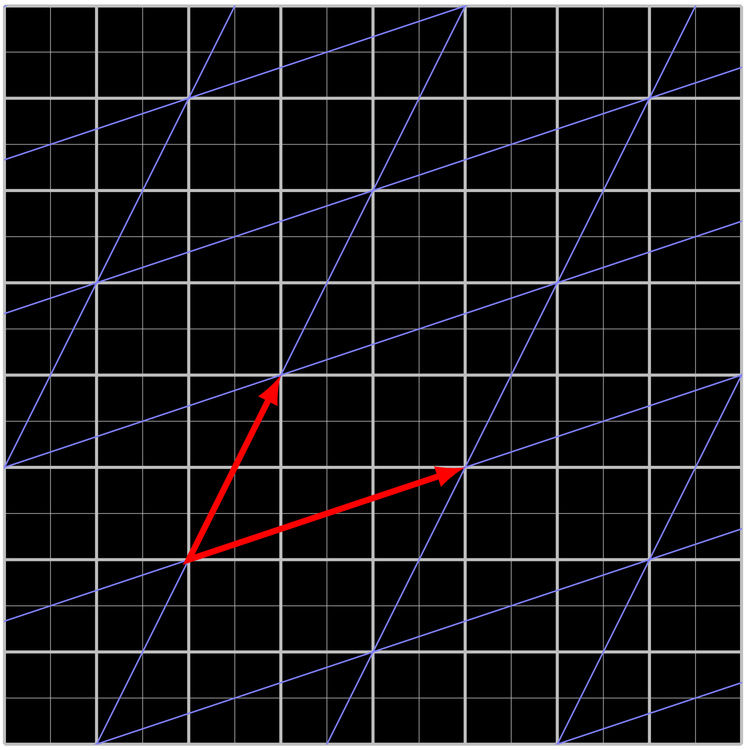
Lineární izomorfismy IV

Tedy konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní se sloupcovým (řádkovým) vektorovým prostorem K^n právě tehdy, když $n = \dim V$.

Přitom každá báze β prostoru V určuje jeden takovýto izomorfismus $V \to K^n$ –

je jím souřadnicové zobrazení $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\beta$.

Lineární izomorfismy V



Obsah

Motivace I

Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$. V prostoru K^n máme kanonickou bázi $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$.

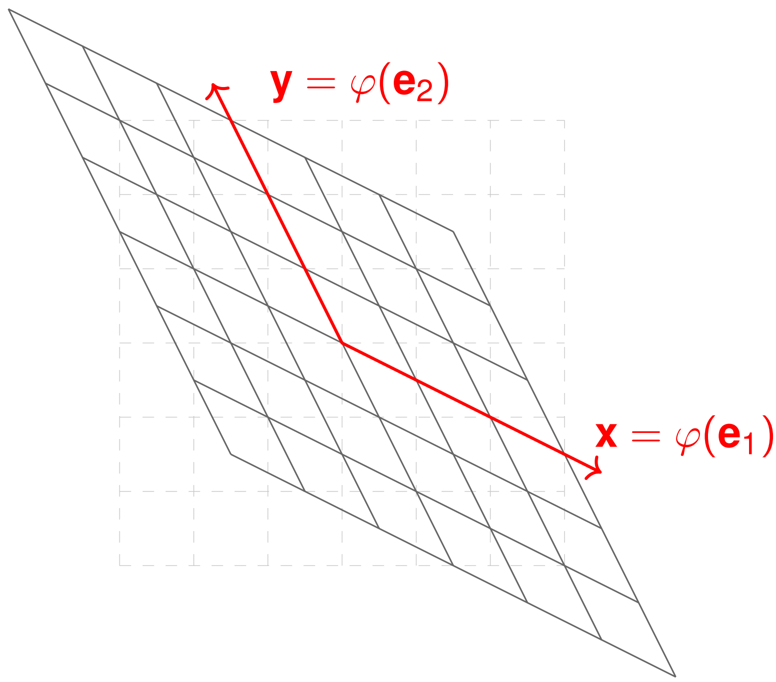
Protože obrazy $\varphi(\mathbf{e}_j)$ vektorů této báze jsou sloupcové vektory z prostoru K^m, můžeme vytvořit matici

$$\mathbf{A} = (\varphi(\mathbf{e}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{e}_n)) \in K^{m \times n},$$

jejímiž sloupci jsou právě tyto vektory,

t. j. platí $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{e}_j)$ pro $1 \le j \le n$.

Motivace II



Motivace III

Ukážeme, jak můžeme obraz $\varphi(\mathbf{x})$ libovolného vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n$ vypočítat pouze ze znalosti této matice.

Uvědomme si, že $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, a počítejme

$$
\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{x}) &= \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) \\
&= x_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \ldots + x_n\varphi(\mathbf{e}_n) \\
&= (\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \cdot (x_1, \ldots, x_n)^T \\
&= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}
\end{aligned}
$$

Tedy ***každé*** lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$ má tvar $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro vhodnou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

Motivace IV

Protože každý konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K je izomorfní s prostorom K^n pro $n = \dim V$,

při volbě pevných bazí v konečně rozměrných prostoroch U, V, bude možné libovolné lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ zakódovat pomocí vhodné matice $\mathbf{A}$.

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\varphi"] & U \arrow[d, "(-)_{\boldsymbol{\alpha}}"] \\
K^n \arrow[u, "(-)_{\boldsymbol{\beta}}^{-1}"] \arrow[r, "\mathbf{A} \cdot (-) = (-)_{\boldsymbol{\alpha}} \circ \varphi \circ (-)_{\boldsymbol{\beta}}^{-1}"'] & K^m
\end{tikzcd}
$$

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím I

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K, $\dim U = m$, $\dim V = n$ a $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$, $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jsou báze v U, resp. ve V.

Maticí lineárního zobrazení $\varphi : V \to U$ ***vzhledem k bazím*** β, α nazýváme matici

$$\mathbf{A} = ((\varphi(\mathbf{v}_1))_\alpha, \ldots, (\varphi(\mathbf{v}_n))_\alpha) \in K^{m\times n},$$

jejíž sloupce jsou tvořeny souřadnicemi obrazů $\varphi(\mathbf{v}_j)$ vektorů báze β vzhledem k bázi α,

t. j. platí $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = (\varphi(\mathbf{v}_j))_\alpha$ pro $1 \leq j \leq n$.

Tuto matici značíme též

$$\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha,\beta}.$$

Abstrakt Jádro a obraz | Matice LZ Matice přechodu | Skeletní rozklad | Motivace Matice v bazích | Příklady Prostory LZ

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím II

Všimněme si u $(\varphi)_{\alpha,\beta}$ obrácené pořadí znaků bazí vůči pořadí vektorových prostorů v označení zobrazení $\varphi : V \to U$.

Matici $\mathbf{A}$ ze začátku tohoto paragrafu můžeme nazvat ***maticí lineárního zobrazení*** $\varphi : K^n \to K^m$ ***vzhledem na kanonickou bázi*** $\varepsilon^{(n)}$, $\varepsilon^{(m)}$.

Tedy $\mathbf{A} = (\varphi)_{\varepsilon^{(m)},\varepsilon^{(n)}}$.

Pokud neřekneme jinak, budeme pod maticí lineárního zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$ mezi sloupcovými vektorovými prostory vždy rozumět matici $(\varphi)_{\varepsilon^{(m)},\varepsilon^{(n)}}$ zobrazení φ vzhledem ke kanonickým bazím.

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím III

Maticí lineární transformace $\varphi : V \to V$ vzhledem k bázi $\boldsymbol{\alpha}$ prostoru V tedy rozumíme matici $(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}}$.

Přitom platí $(\mathbf{v}_j)_{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{e}_j^{(n)}$ pro libovolný vektor $\mathbf{v}_j$ báze $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ prostoru V.

Z toho je zřejmé, že pro každou bázi $\boldsymbol{\beta}$ n-rozměrného vektorového prostoru V platí

$$(\mathrm{id}_V)_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{e}_j^{(n)})_{j=1}^n = \mathbf{I}_n.$$

Abstrakt Matice LZ Skeletní rozklad Motivace Příklady
Jádro a obraz Matice přechodu Matice v bazích Prostory LZ

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím IV

Věta 2.1

Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad tělesem K, $\dim V = n$, $\dim U = m$ a $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ jsou báze prostorů U resp. V.

Potom pro všechna $\mathbf{x} \in V$ platí

$$(\varphi(\mathbf{x}))_{\boldsymbol{\alpha}} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\beta}}$$

a $\mathbf{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ je jediná matice touto vlastností.

Maticí lineárního zobrazení vzhledem k bazím V

Skládání lineárních zobrazení zodpovídá násobení matic.

Věta 2.2

Nechť U, V, W jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K, $\boldsymbol{\alpha}$ je báze U, $\boldsymbol{\beta}$ je báze V a γ je báze W.

Potom pro libovolné lineární zobrazení $\psi : W \to V$, $\varphi : V \to U$ platí

$$(\varphi \circ \psi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot (\psi)_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}}.$$

Příklady I

Příklad 2.3

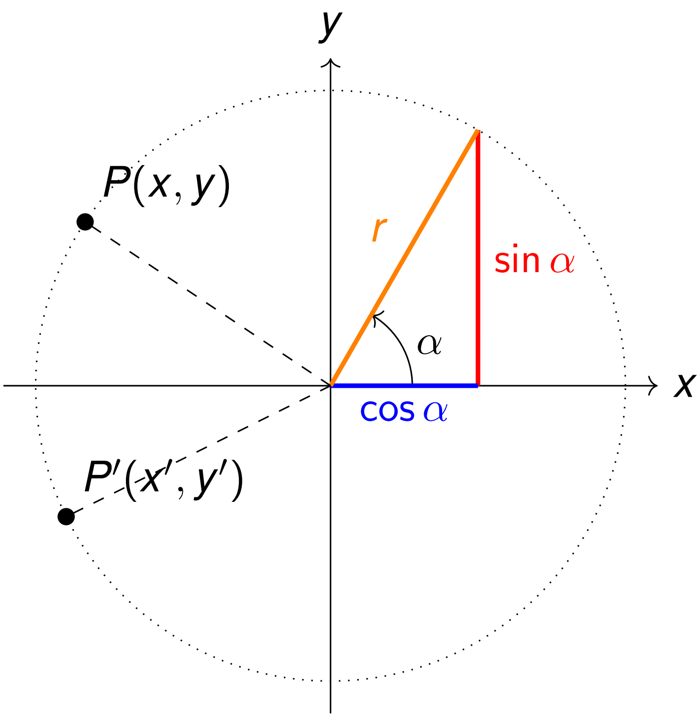
Otočení *roviny okolo počátku o úhel $\alpha \in \mathbb{R}$ je lineární zobrazení* $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Matici tohoto lineárního zobrazení vzhledem na kanonickou bázi ε budeme značit rovněž $\mathbf{R}_\alpha$,

tedy pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ *budeme psát* $\mathbf{R}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}$.

Její sloupce získáme otočením vektorů $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$ *o úhel* α.

Příklady II



Abstrakt
Jádro a obraz
Matice LZ
Matice přechodu
Skeletní rozklad
Motivace
Matice v bazích
Příklady
Prostory LZ

Příklady II

Z definice goniometrických funkcí sinus a cosinus pomocí jednotkové kružnice dostáváme

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

To znamená, že $\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

a obrazem libovolného vektoru $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ *v otočení* $\mathbf{R}_\alpha$ *je vektor*

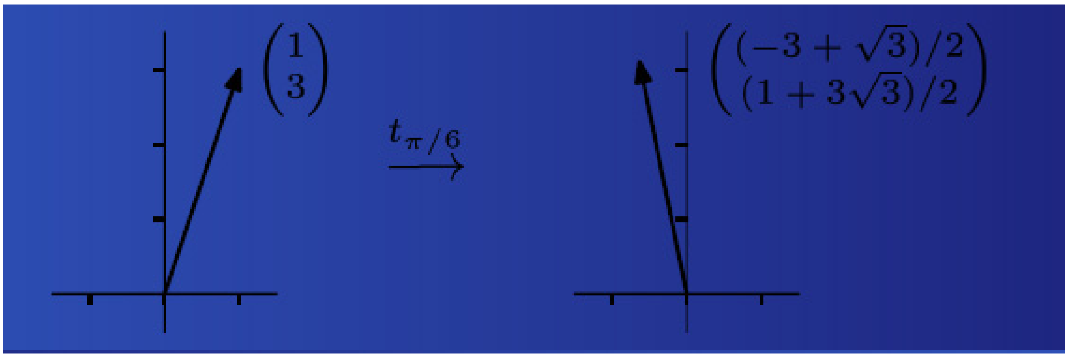
$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Příklady III

Matice

$$\mathbf{R}_{\pi/6} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

reprezentuje vzhledem ke standardní bázi transformaci $\mathbf{R}_{\pi/6} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, která otočí vektory o* $\pi/6$ *radiánů proti směru hodinových ručiček.*



Příklady IV

Příklad 2.4

Osová souměrnost *roviny podle libovolné přímky procházející počátkem definuje zobrazení* $\mathbf{S}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, kde* $\alpha \in \mathbb{R}$ *je úhel, který svírá osa souměrnosti s osou* x*.*

Pomocí obdobné úvahy jako v případě otočení můžeme ověřit, že i $\mathbf{S}_\alpha$ *je lineární zobrazení.*

Jeho matici vzhledem ke kanonické bázi ε *budeme značit stejně, tj.* $\mathbf{S}_\alpha$*.*

Zřejmě matice souměrnosti podle osy x *je*

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Příklady V

Osovou souměrnost $\mathbf{S}_\alpha$ můžeme obdržet jako složení otočení $\mathbf{R}_{-\alpha}$, osové souměrnosti $\mathbf{S}_0$ a otočení $\mathbf{R}_\alpha$,

tj.

$$\mathbf{S}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{R}_{-\alpha}.$$

Po vynásobení příslušných matic z toho s využitím trigonometrických vzorců dostaneme

$$\mathbf{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Tedy osová souměrnost $\mathbf{S}_\alpha$ *zobrazí vektor* $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ *na vektor*

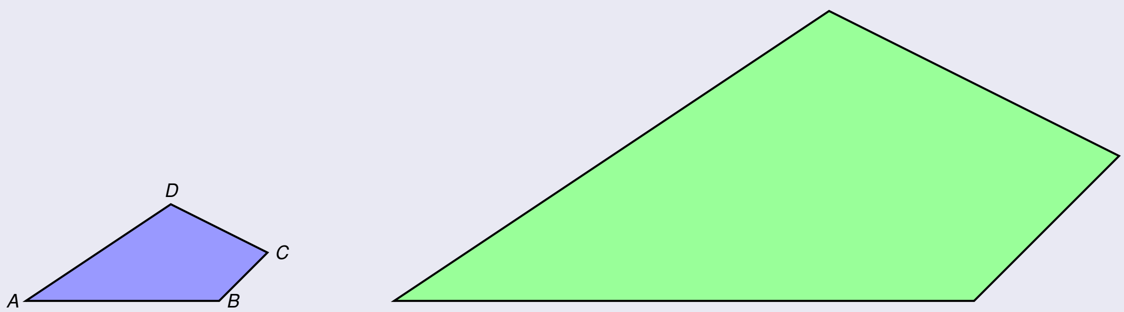
$$\mathbf{S}_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos 2\alpha + y \sin 2\alpha \\ x \sin 2\alpha - y\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Abstrakt
Jádro a obraz
Matice LZ
Matice přechodu
Skeletní rozklad
Motivace
Matice v bazích
Příklady
Prostory LZ

Příklady VI

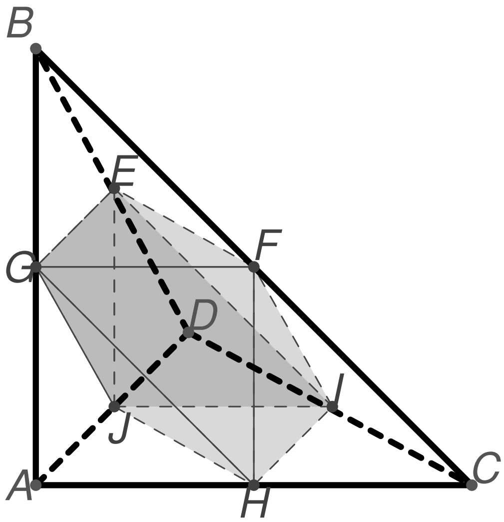
Příklad 2.5

Stejnolehlost *neboli též* **homotetie** *se středem v počátku a s koeficientem podobnosti* $0 \neq c \in \mathbb{R}$ *je opět lineární zobrazení* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *s maticí* $c\mathbf{I}_2 = \mathrm{diag}(c, c)$.



Tento příklad můžeme evidentním způsobem zevšeobecnit na libovolnou dimenzi n.

Příklady VII



Zkosený hranol

Příklady VIII

Příklad 2.6

Zkosení *(kroucení, střih) způsobuje deformace tvarů.*

Výsledek transformace vyvolává dojem, jako kdyby objekty byly složeny z mnoha vrstev, které jsou po sobě posouvány.

Dvě základní transformace jsou zkosení ve směru x a zkosení ve směru y.

Pro zkosení ve směru x s parametrem $a \in K$ se používá transformační matice určená předpisem:

$$\varphi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ ax + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Je tak definovaná lineární transformace roviny, která posouvá její každou "vodorovnou vrstvu" $\{(x, y);\ y = s\}$, $s \in K$, o vektor $as\mathbf{e}_1$. Analogické lineární transformace fungují i ve vícerozměrných prostorech K^n.

Prostory lineárních zobrazení I

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K.

Uvažme vektorový prostor U^V ***všech*** zobrazení $f : V \to U$ s operacemi součtu a skalárního násobku definovanými po složkách.

Pak pro množinu $\mathcal{L}(V, U)$ všech ***lineárních*** zobrazení $\varphi : V \to U$ platí $\mathcal{L}(V, U) \subseteq U^V$.

Prostory lineárních zobrazení II

Tvrzení 2.7

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Potom $\mathcal{L}(V, U)$ je lineární podprostor vektorového prostoru U^V.

Tedy $\mathcal{L}(V, U)$ je vektorový prostor nad K.

Tvrzení 2.8

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = m$, $\dim V = n$.

Potom

$$\mathcal{L}(V, U) \cong K^{m \times n},$$

tedy $\dim \mathcal{L}(V, U) = mn$.

Prostory lineárních zobrazení III

Zvolme bázi α v prostoru U a β v prostoru V.

Na matici $(\varphi)_{\alpha,\beta}$ se můžeme dívat jako na souřadnice vektoru $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ v prostoru $K^{m\times n}$, vzhledem na dvojici bazí β, α.

Lineární zobrazení $\varphi : V \to K$ z vektorového prostoru V do tělesa K se nazývá ***lineární funkcionál*** nebo též ***lineární forma*** na V.

Vektorový prostor $\mathcal{L}(V, K)$ všech lineárních forem na V se nazývá ***duální prostor*** nebo jen krátce ***duál*** vektorového prostoru V.

Budeme používat označení $\mathcal{L}(V, K) = V^*$.

Abstrakt Matice LZ Skeletní rozklad Motivace Příklady
Jádro a obraz Matice přechodu Matice v bazích Prostory LZ

Prostory lineárních zobrazení IV

Pokud v tělese K budeme vždy uvažovat pouze kanonickou bázi sestávající z jediného vektoru $1 \in K$,

libovolná báze β v konečně rozměrném prostoru V určuje lineární izomorfismus $V^* \to V$ daný předpisem $\varphi \mapsto (\varphi)_{1,\beta}$.

Platí tedy

Tvrzení 2.9

Pro libovolný konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem K platí $V^* \cong V$.

Prostory lineárních zobrazení V

Matice $(\varphi)_{1,\beta}$ lineárního funkcionálu $\varphi : V \to K$ je řádkový vektor z prostoru $K^{1\times n}$.

Při volbě kanonické báze ε v sloupcovém prostoru $K^{n\times 1}$ můžeme řádkový prostor $K^{1\times n}$ ztotožnit s duálem $\left(K^{n\times 1}\right)^*$ sloupcového prostoru $K^{n\times 1}$.

Izomorfismus konečně rozměrného prostoru V a jeho duálu V^* závisí od výběru báze ve V.

Prostory lineárních zobrazení VI

Pro libovolný vektorový prostor V můžeme definovat kanonické,

tj. od výběru báze nezávislé zobrazení z prostoru V do jeho ***druhého duálu*** V^{**}

dané předpisem $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$, kde

$$\widehat{\mathbf{x}}(\varphi) = \varphi(\mathbf{x})$$

pro $\mathbf{x} \in V$, $\varphi \in V^*$.

Prostory lineárních zobrazení VII

Tvrzení 2.10

Nech V je vektorový prostor nad tělesem K.

Potom

(a) $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ *je injektivní lineární zobrazení* $V \to V^{**}$;

(b) *pokud je V konečně rozměrný, pak* $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ *je lineární izomorfismus* $V \to V^{**}$.

Prostory lineárních zobrazení VIII

Každý vektor $\mathbf{x} \in V$ definuje lineární funkcionál $\widehat{\mathbf{x}}$ na duálním prostoru V^*.

Konečně rozměrný vektorový prostor V můžeme přiřazením $\mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}}$ ***přirozeně*** ztotožnit s duálem prostoru V^*.

Obsah

Definice matice přechodu I

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K a $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jsou jeho dvě báze.

Maticí přechodu z báze β do báze α nazýváme matici identického zobrazení $\mathrm{id}_V : V \to V$ vzhledem na bázi β, α, kterou značíme $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$. Tedy

$$\mathbf{P}_{\alpha,\beta} = (\mathrm{id}_V)_{\alpha,\beta}.$$

Definice matice přechodu II

Sloupce matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ jsou tvořeny souřadnicemi vektorů báze β vzhledem na bázi α,

t. j. $\mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\alpha,\beta}) = (\mathbf{v}_j)_\alpha$ pro $1 \le j \le n$.

Tedy

$$\mathbf{P}_{\alpha,\beta} = \big((\mathbf{v}_1)_\alpha, (\mathbf{v}_2)_\alpha, \ldots, (\mathbf{v}_n)_\alpha\big),$$

a tato matice je jednoznačně určená podmínkou transformace souřadnic

$$(\mathbf{x})_\alpha = \mathbf{P}_{\alpha,\beta} \cdot (\mathbf{x})_\beta$$

pro libovolné $\mathbf{x} \in V$.

Definice matice přechodu III

Pokud do rovnosti $\mathbf{x} = \alpha \cdot (\mathbf{x})_\alpha$ budeme za $\mathbf{x}$ postupně dosazovat vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ bázi β, s využitím vztahu pro sloupce součinu matic dostaneme

$$\mathbf{v}_j = \alpha \cdot (\mathbf{v}_j)_\alpha = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\alpha,\beta}) = \mathbf{s}_j(\alpha \cdot \mathbf{P}_{\alpha,\beta})$$

pro každé $1 \le j \le n$.

Tedy

$$\alpha \cdot \mathbf{P}_{\alpha,\beta} = \beta.$$

Vlastnosti matice přechodu I

Tvrzení 3.1

Nechť α, β jsou báze n-rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K.

Potom pro libovolnou matici $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $\mathbf{P} = (\mathrm{id}_V)_{\alpha,\beta}$, *t. j.* $\mathbf{P}$ *je matice přechodu z báze* β *do báze* α*;*

(ii) $(\mathbf{x})_\alpha = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{x})_\beta$ *pro každé* $\mathbf{x} \in V$*;*

(iii) $\alpha \cdot \mathbf{P} = \beta$*.*

Vlastnosti matice přechodu II

Tvrzení 3.2

Nechť α, β, γ jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K.

Potom

$$\mathbf{P}_{\alpha,\alpha} = \mathbf{I}_n,$$

$$\mathbf{P}_{\beta,\alpha} = \mathbf{P}_{\alpha,\beta}^{-1},$$

$$\mathbf{P}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{P}_{\beta,\gamma} = \mathbf{P}_{\alpha,\gamma}.$$

Z druhé z uvedených podmínek vidíme, že matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ je vždy ***regulární***.

Naopak, každá regulární matice $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$ je maticí přechodu mezi vhodnou dvojicí bazí.

Vlastnosti matice přechodu III

Tvrzení 3.3

Nechť V je n-rozměrný vektorový prostor nad K a $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ je libovolná regulární matice.

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je nějaká báze ve V. Položme $\mathbf{v}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P})$, $\mathbf{w}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}^{-1})$ pro $1 \le j \le n$, a dále

$$\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}, \ \gamma = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

Potom $\mathbf{P}$ je maticí přechodu z báze β do báze α a zároveň z báze α do báze γ, t. j.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\alpha,\beta} = \mathbf{P}_{\gamma,\alpha}.$$

Vlastnosti matice přechodu IV

Speciálně, $\mathbf{P}$ je maticí přechodu z báze $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}))$ do báze $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ v K^n

a taktéž z báze ε do báze $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}^{-1}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}^{-1}))$.

Tvrzení 3.4

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$, $\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jsou dvě báze sloupcového vektorového prostoru K^n. Potom $\mathbf{P}_{\alpha,\beta} = \alpha^{-1} \cdot \beta$.

Výpočet matice přechodu I

Návod na výpočet matice přechodu pro báze α, β vektorového prostoru K^n

$$(\boldsymbol{\alpha} \,|\, \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \,|\, \mathbf{P}_{\alpha,\beta}) = (\varepsilon \,|\, \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta}).$$

Matice LZ vzhledem na různé báze I

Věta 3.5

Nechť V_1, V_2 jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K, $\varphi : V_1 \to V_2$ je lineární zobrazení, α_1, β_1 jsou dvě báze prostoru V_1 a α_2, β_2 jsou dvě báze prostoru V_2.

Matice LZ vzhledem na různé báze I

Věta 3.6

Nechť V_1, V_2 jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K, $\varphi : V_1 \to V_2$ je lineární zobrazení, α_1, β_1 jsou dvě báze prostoru V_1 a α_2, β_2 jsou dvě báze prostoru V_2.

Potom

$$(\varphi)_{\beta_2,\beta_1} = \mathbf{P}_{\beta_2,\alpha_2} \cdot (\varphi)_{\alpha_2,\alpha_1} \cdot \mathbf{P}_{\alpha_1,\beta_1}.$$

Matice LZ vzhledem na různé báze II

Výše uvedenou transformační formuli si můžeme zapamatovat pomocí následujícího diagramu:

$$\begin{tikzcd}
(V_1, \alpha_1) \arrow[r, "\mathbf{A}"] & (V_2, \alpha_2) \arrow[d, "\mathbf{P}_{\beta_2,\alpha_2}"] \\
(V_1, \beta_1) \arrow[u, "\mathbf{P}_{\alpha_1,\beta_1}"'] \arrow[r, "\mathbf{B}"] & (V_2, \beta_2)
\end{tikzcd}$$

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Příklad 3.7

Nechť $\varphi : K^n \to K^m$ je lineární zobrazení a α, β jsou nějaké báze prostorů K^m resp. K^n.

Označme $\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha,\beta}$, $\mathbf{M} = (\varphi)_{\varepsilon^{(m)},\varepsilon^{(n)}}$ matice zobrazení φ vzhledem k bazím β, α resp. vzhledem ke kanonickým bazím $\varepsilon^{(n)}$, $\varepsilon^{(m)}$.

Pak platí:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_{\alpha,\varepsilon^{(m)}} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}_{\varepsilon^{(n)},\beta}$$

a

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}_{\varepsilon^{(m)},\alpha} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{\beta,\varepsilon^{(n)}}.$$

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Pokud ztotožníme každou bázi s regulární maticí, jejíž sloupce jsou vektory této báze, tak výše uvedené rovnosti získají tvar

$$\mathbf{A} = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{I}_m \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{I}_n^{-1} \cdot \beta = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \beta,$$

a

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}_m^{-1} \cdot \alpha \cdot \mathbf{A} \cdot \beta^{-1} \cdot \mathbf{I}_n = \alpha \cdot \mathbf{A} \cdot \beta^{-1}.$$

Matice LZ vzhledem na různé báze IV

Věta 3.8

Nechť U je m-rozměrný a V je n-rozměrný vektorový prostor nad tělesem K.

Potom pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ *jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *jsou matice stejného lineárního zobrazení* $\varphi : V \to U$ *vzhledem na nějaké dvě dvojice bazí prostorů* U, V*;*

(ii) existují regulární matice $\mathbf{P} \in K^{m \times m}$, $\mathbf{Q} \in K^{n \times n}$ *tak, že* $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$*;*

(iii) $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$.

Matice LZ vzhledem na různé báze V

Věta 3.9

Pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \to U$ *mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad tělesem* K *můžeme zvolit bázi* β *prostoru* V *a bázi* α *prostoru* U *tak, že*

φ *má vzhledem k bazím* β, α *matici v blokovém tvaru*

$$(\varphi)_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_h & \mathbf{0}_{h,n-h} \\ \mathbf{0}_{m-h,h} & \mathbf{0}_{m-h,n-h} \end{pmatrix},$$

kde $n = \dim V$, $m = \dim U$ *a* $h = h(\varphi)$.

Obsah

Definice skeletního rozkladu matice I

Uvažme matici A typu $m \times n$ hodnosti $r \geq 1$ nad tělesem K.

Napišme nějakou bázi podprostoru ImA prostoru K^m do sloupců matice B.

Každý sloupec $\mathbf{a}_j$ matice A je lineární kombinací sloupců matice B.

Platí tedy $\mathbf{a}_j = B\mathbf{c}_j$ pro nějaký vektor $\mathbf{c}_j \in K^r$.

Označíme-li tedy $C = (\mathbf{c}_1 | \dots | \mathbf{c}_n)$, máme rozklad $A = BC$, kde B je matice typu $m \times r$ a C je matice typu $r \times n$.

Takovému rozkladu říkáme **skeletní rozklad**.

Za sloupce matice B můžeme vzít ***bázové sloupce*** matice A, tj. ty sloupce matice A určené vedoucími prvky matice řádkově ekvivalentní s maticí A, která je v (redukovaném) stupňovitém tvaru.

Skeletní rozklad matic II

Skeletní rozklad se hodí pro ukládání matic nízkých hodností a počítání s nimi.

Věta 4.1

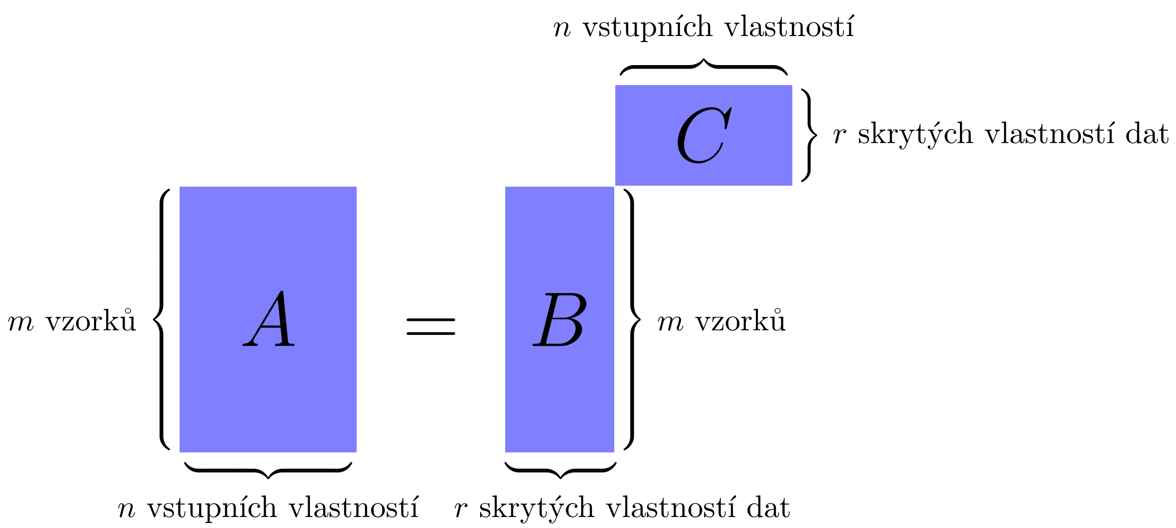
Libovolná matice A typu $m \times n$ nad tělesem K s hodností $r \geq 1$ je rovná součinu $A = BC$, kde B je matice typu $m \times r$ tvořená bázovými sloupci matice A (v pořadí, v jakém se vyskytují v A) a C je matice typu $r \times n$ tvořená nenulovými řádky v redukovaném stupňovitém tvaru D matice A.

Věta 4.2

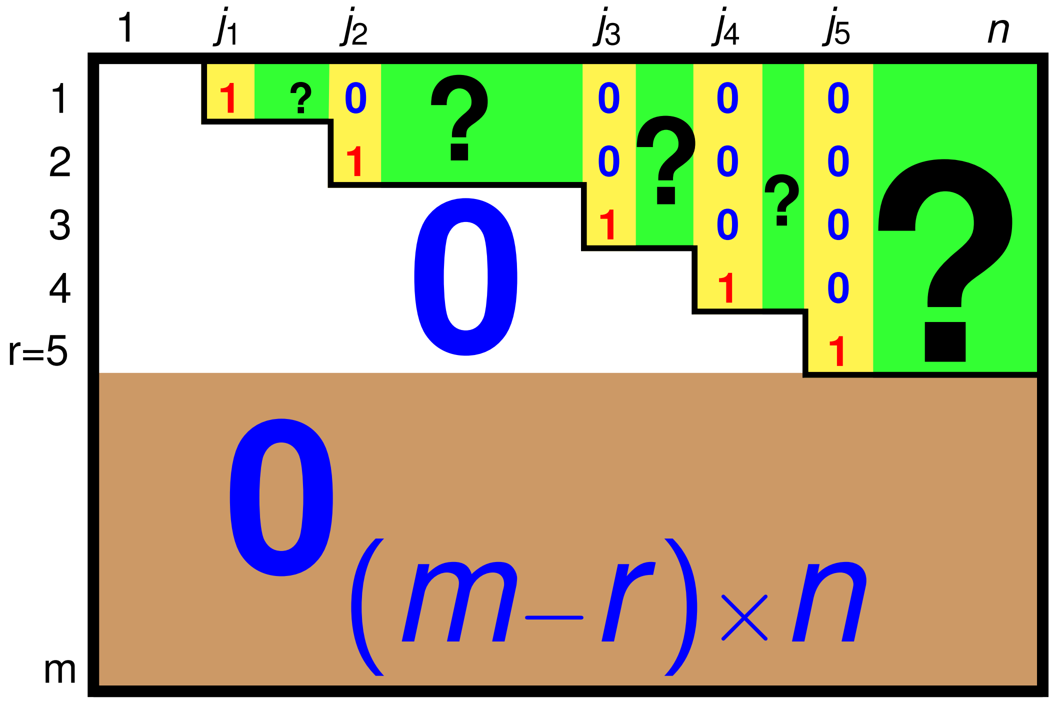
Pro každou matici A existuje právě jedna matice J v redukovaném stupňovitém tvaru taková, že J lze získat z A elementárními řádkovými úpravami.

Abstrakt
Jádro a obraz
Matice LZ
Matice přechodu
Skeletní rozklad
Definice

Skeletní rozklad matic $A = B \cdot C$ III



Skeletní rozklad matic III



Redukovaný stupňovitý tvar

Skeletní rozklad matic IV