3. ZÁKLADY MATICOVÉHO POČTU

Jan Paseka

Ústav matematiky a statistiky
Masarykova univerzita

2. října 2024

Obsah

Abstrakt

V této kapitole se znovu potkáme s ***maticemi***, tj. obdélníkovými tabulkami, s jejichž pomocí budeme kódovat nejrůznější důležité údaje, a naučíme se s nimi lépe pracovat.

Abstrakt
Matice nad množinou
Matice nad tělesem
Násobení matic
Algebra matic
Operace s bloky
Typy matic
Prvky matice
Příklady matic
Totožné matice
Řádky a sloupce
Blokové matice

Obsah

Typy matic

Nechť X je libovolná množina a $m, n \in \mathbb{N}$.

Maticí typu $m \times n$, nebo též $m \times n$*-rozměrnou maticí* nad množinou X rozumíme obdélníkovou tabulku

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

sestávající z prvků množiny X.

Zkráceně píšeme $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ nebo $\mathbf{A} = (a_{ij})$.

Prvky matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

Prvky $a_{ij} \in X$, kde $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, se nazývají ***prvky matice*** $\mathbf{A}$.

Prvek a_{ij}, který se nachází v i-tém řádku a j-tém sloupci matice $\mathbf{A}$ nazýváme též ***prvek v místě*** (na pozici) (i, j), resp. (i, j)***-tý prvek*** matice $\mathbf{A}$.

Množinu všech $m \times n$-rozměrných matic nad množinou X značíme $X^{m \times n}$ (též $Mat_{m,n}(X)$).

Pokud $m = n$, mluvíme o ***čtvercových maticích řádu*** n nad množinou X.

Příklady matic I

Příklad 1.1

Ceny komodit či akcií v jednotlivých dnech můžeme uložit do matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$, kde a_{ij} je závěrečná cena i-té komodity či akcie v j-tém dni. Přitom každý den se zveřejňuje nový sloupec matice (noviny, web).

Následující tabulka je převzata z článku An Empirical Analysis of the Product-Process Matrix.

Table 4 Factor Loadings After a Promax Rotation

Variables	QUALITY	TIME	COST	PFLEX	DVSPEED	VFLEX
Product performance (Q6)	**0.80**	0.13	0.47	0.19	0.16	0.04
Number of features on the product (Q7)	**0.65**	−0.11	0.29	0.15	−0.03	0.40
Product quality consistency (Q8)	**0.84**	0.51	0.25	−0.05	0.10	−0.13
Prdt. quality as perceived by the cust. (Q9)	**0.81**	0.37	0.38	−0.07	−0.04	−0.08
Introduce new prdt. quickly (Q10)	0.10	0.29	−0.01	−0.03	**0.84**	0.38
Delivery time (Q11)	0.21	**0.92**	0.19	−0.05	0.10	0.08
Dependability on delivery (Q12)	0.36	**0.91**	0.12	−0.16	0.15	−0.06
Product cost (Q13)	0.42	0.11	**0.89**	0.10	−0.02	0.09
Product price (Q14)	0.40	0.19	**0.84**	0.10	0.13	−0.09
Customizing prdt. to customer spec. (Q15)	0.03	−0.13	0.08	**0.88**	−0.02	0.09
Adjust capacity rapidly (Q16)	0.01	0.10	−0.00	0.00	0.35	**0.90**
Ability to make design changes (Q17)	0.00	−0.09	0.12	0.30	**0.84**	0.17
Degree of product standardization (Q1)	0.11	−0.06	0.18	**0.89**	0.14	0.07
Eigenvalues	2.95	2.27	2.10	1.78	1.67	1.21

Abstrakt
Matice nad množinou
Matice nad tělesem
Násobení matic
Algebra matic
Operace s bloky
Typy matic
Prvky matice
Příklady matic
Totožné matice
Řádky a sloupce
Blokové matice

Příklady matic II

Tabulka je převzata z knihy Inteligentní investor od B. Grahama, Grada Publishing 2007.

TABULKA 3-2 *Obrázek výkonnosti akciového trhu, 1871 až 1970*[a]

Období	Průměrná cena	Průměrné zisky	Průměr ukazatele P/E	Průměrná dividenda	Průměrný výnos (%)	Průměrný výplatní poměr	Roční tempa růstu (%) [b]	
							Zisky	Dividendy
1871–1880	3,58	0,32	11,2	0,21	6,0	67	–	–
1881–1890	5,00	0,32	15,6	0,24	4,7	75	−0,64	−0,66
1891–1900	4,65	0,30	15,5	0,19	4,0	64	−1,04	−2,23
1901–1910	8,32	0,63	13,1	0,35	4,2	58	+6,91	+5,33
1911–1920	8,62	0,86	10,0	0,50	5,8	58	+3,85	+3,94
1921–1930	13,89	1,05	13,3	0,71	5,1	68	+2,84	+2,29
1931–1940	11,55	0,68	17,0	0,78	5,1	85	−2,15	−0,23
1941–1950	13,90	1,46	9,5	0,87	6,3	60	+10,60	+3,25
1951–1960	39,20	3,00	13,1	1,63	4,2	54	+6,74	+5,90
1961–1970	82,50	4,83	17,1	2,68	3,2	55	+5,80[c]	+5,40[c]
1954–1956	38,19	2,56	15,1	1,64	4,3	65	+2,40[d]	+7,80[d]
1961–1963	66,10	3,66	18,1	2,14	3,2	58	+5,15[d]	+4,42[d]
1968–1970	93,25	5,60	16,7	3,13	3,3	56	+6,30[d]	+5,60[d]

[a] *Uvedené údaje jsou z většiny založeny na datech, která ve svém článku Stock Values and Stock Prices, otištěného v Financial Analysts Journal, květen 1960, uvádí N. Molodovsky. Autor zase čerpal údaje pro období před rokem 1926 z knihy Cowlesovy komise Common Stock Indexes a údaje pro období po roce 1926 z akciového indexu Standard & Poor's 500.*

[b] *Roční tempa růstu představují Molodovského výpočty pro jednotlivá jednadvacetiletá období, jež končila v roce 1890, 1900 atd.*

[c] *Tempa růstu mezi obdobími 1968 až 1970 a 1958 až 1960.*

[d] *Uvedená tempa růstu představují nárůsty mezi obdobími 1954 až 1956 a 1947 až 1949, 1961 až 1963 a 1954 až 1956 a mezi periodami 1968 až 1970 a 1958 až 1960.*

Totožné matice

Poznamenejme, že v případě, když některé z čísel m, n je 0, množina $X^{m\times n}$ sestáva z jediné a to ***prázdné*** matice $\emptyset$. Dále se budeme vždy bavit jen o maticích kladných rozměrů $m \times n$.

Dvě matice nad množinou X považujeme za ***navzájem stejné*** neboli ***totožné***, pokud mají stejné rozměry a stejné prvky na příslušných místech.

To znamená, že pro matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{p\times q}$ nad X klademe $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ právě tehdy, když $m = p$, $n = q$ a pro všechny $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ platí $a_{ij} = b_{ij}$.

Množina matic typu $1 \times n$ nad X splývá s množinou X^n, pokud uspořádané n-tice prvků z X zapisujeme do řádku. Podobně, pokud uspořádané m-tice prvků z X zapisujeme do sloupce, tak množina matic typu $m \times 1$ nad X splývá s množinou X^m.

Řádky a sloupce matice I

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in X^{m\times n}$. Uspořádanou n-tici

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in X^{1\times n},$$

kde $1 \leq i \leq m$, nazýváme ***i-tým řádkem*** matice $\mathbf{A}$.

Podobně, uspořádanou m-tici

$$\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \text{ kde } 1 \leq j \leq n$$

nazýváme ***j-tým sloupcem*** matice $\mathbf{A}$.

Řádky a sloupce matice II

Matici **A** tak můžeme ztotožnit jak se sloupcem složeným z jejích řádků tak s řádkem složeným z jejích sloupců, tj.

$$\mathbf{A} \quad = \quad \left(\ \mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \quad \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \quad \ldots, \quad \mathbf{s}_n(\mathbf{A}) \ \right),$$

a

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \mathbf{r}_2(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix}.$$

Transponovaná matice

Matici, kterou získáme z matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ záměnou jejích řádků a sloupců, nazývame ***transponovanou maticí*** k matici **A** a značíme ji $\mathbf{A}^T$.

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

To znamená, že $\mathbf{A}^T \in X^{n\times m}$ a prvek na pozici (j, i) matice $\mathbf{A}^T$ je a_{ij}.

Zřejmě pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in X^{m\times n}$ platí

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}.$$

Transponovaní řádků a sloupců

Transpozicí matic-řádků z $X^{1\times n}$ dostaneme matice-sloupce z $X^{n\times 1}$ a transpozicí matic-sloupců z $X^{m\times 1}$ matice-řádky z $X^{1\times m}$.

Na základě této poznámky lze snadno vidět, že pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in X^{m\times n}$ a $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ platí

$$\mathbf{s}_i(\mathbf{A}^T) = \mathbf{r}_i(\mathbf{A})^T, \qquad \mathbf{r}_j(\mathbf{A}^T) = \mathbf{s}_j(\mathbf{A})^T.$$

Čtvercová matice $\mathbf{A} \in X^{n\times n}$ se nazývá ***symetrická***, pokud $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, tj. pokud $a_{ij} = a_{ji}$ pro všechny indexy $i, j = 1, \dots, n$.

Posloupnost prvků $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ nazýváme ***diagonálou*** čtvercové matice $\mathbf{A}$.

Transponovanou matici k čtvercové matici $\mathbf{A}$ zřejmě získáme "osovou souměrností" jejich prvků podle diagonály.

Abstrakt
Matice nad množinou
Matice nad tělesem
Násobení matic
Algebra matic
Operace s bloky
Typy matic
Prvky matice
Příklady matic
Totožné matice
Řádky a sloupce
Blokové matice

Blokové matice I

Někdy bude užitečné spojit dvě matice $\mathbf{A} \in X^{m\times n_1}$, $\mathbf{B} \in X^{m\times n_2}$ se stejným počtem řádků do jedné matice tak, že příslušné tabulky jednoduše napíšeme vedle sebe.

Výsledná matice je typu $m \times (n_1 + n_2)$ a značíme ji $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, případně $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$.

Podobně můžeme spojit dvě matice $\mathbf{A} \in X^{m_1\times n}$, $\mathbf{B} \in X^{m_2\times n}$ se stejným počtem sloupců do jedné matice tak, že příslušné tabulky napíšeme pod sebe.

Výsledná matice je typu $(m_1 + m_2) \times n$ a značíme ji

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \text{ případně } \left(\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{B} \end{array}\right).$$

Blokové matice II

Právě popsané konstrukce jsou příklady tzv. ***blokových matic***. Původní matice, ze kterých takto vytváříme blokovou matici, potom nazýváme jejími ***bloky***.

Samozřejmě můžeme vedle sebe resp. pod sebe zařadit větší počet bloků než pouze dva.

Naopak, někdy může být účelné vyznačit v dané matici nějaké menší obdélníkové části jako její bloky.

Pak mluvíme o tzv. ***blokovém tvaru*** dané matice.

Příkladem toho byl zápis matice $\mathbf{A} \in X^{m \times n}$ jako řádku složeného z jejích sloupců, případně jako sloupce složeného z jejích řádků.

Uvedená dvě schemata vytváření blokových matic "vedle sebe" a "pod sebe" můžeme kombinovat.

Blokové matice III

Např. z matic $\mathbf{A}_{11} \in X^{m_1 \times n_1}$, $\mathbf{A}_{12} \in X^{m_1 \times n_2}$, $\mathbf{A}_{21} \in X^{m_2 \times n_1}$, $\mathbf{A}_{22} \in X^{m_2 \times n_2}$ můžeme vytvořit blokovou matici

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

typu $(m_1 + m_2) \times (n_1 + n_2)$.

Blokové matice IV

Tuto konstrukci můžeme zřejmým způsobem zevšeobecnit i na větší systémy matic a zapsat ve tvaru

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{ij})_{k\times l} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{k1} & \dots & \mathbf{A}_{kl} \end{pmatrix},$$

přičemž jednotlivé bloky $\mathbf{A}_{ij}$ jsou matice nad X rozměrů $m_i \times n_j$, kde $(m_1, \dots, m_k)$, $(n_1, \dots, n_l)$ jsou nějaké konečné posloupnosti přirozených čísel.

Matici nad množinou X z této "matice matic" dostaneme tak, že si v $\mathbf{A}$ odmyslíme vnitřní závorky oddělující její jednotlivé bloky $\mathbf{A}_{ij}$.

Obsah

Motivace

Na množině X, nad kterou jsme vytvářeli příslušné matice, jsme doposud nepředpokládali žádnou další strukturu.

Všechny doposud zavedené maticové operace a vlastnosti však měly výlučně ***poziční charakter*** – zakládaly sa na reprezentaci každé matice jako příslušné obdélníkové tabulky.

Další maticové operace a vlastnosti, které hodláme zavést a později využívat, už budou podmíněné přítomností jisté struktury na množině X.

V celém odstavci K označuje pevně zvolené, jinak však libovolné těleso, zejména racionální čísla, reálná čísla a komplexní čísla. Prvky z K nazýváme ***skaláry***.
V souladu s předešlým odstavcem $K^{m\times n}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$, označuje množinu všech matic typu $m \times n$ nad K.

Prostor matic I

Pro pevné $m, n \in \mathbb{N}$ budeme na množině matic $K^{m\times n}$ definovat po složkách ***operace součtu*** a ***skalárního násobku***.

Tedy pro matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m\times n}$ nad K a $c \in K$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}, \\ c\mathbf{A} &= (ca_{ij})_{m\times n}. \end{aligned}$$

Součet matic $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ je definovaný jen pro matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ stejného typu a samotná matice $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ je téhož typu jako $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$.

Prostor matic II

Neutrálním prvkem operace sčítání na $K^{m\times n}$ je matice typu $m \times n$, jejíž všechny prvky jsou nulové; nazýváme ji ***nulová matice*** typu $m \times n$ a označujeme ji $\mathbf{0}_{m,n}$, resp. $\mathbf{0}$, je-li její rozměr jasný z kontextu nebo na něm nezáleží.

Opačným prvkem k matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ je zřejmě matice $-\mathbf{A} = (-a_{ij})_{m\times n}$.

Platí tedy

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad \text{a} \quad \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = -\mathbf{A} + \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Obsah

Násobení matic I

Nejprve sa naučíme násobit některé dvojice vektorů.

Součinem $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ ***řádkového vektoru*** $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in K^{1\times n}$ ***a sloupcového vektoru*** $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T \in K^{n\times 1}$ rozumíme skalár

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} &= (x_1, \ldots, x_n)\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^n x_iy_i\,.\end{aligned}$$

V tomto případě jde o běžný "***skalární součin***" vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K^n$.

Násobení matic II

Snadno se ověří, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $c \in K$ a $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in K^{1\times n}$, $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in K^{n\times 1}$ platí

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{y}') &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}', \\ (\mathbf{x}+\mathbf{x}')\cdot\mathbf{y} &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{x}'\cdot\mathbf{y}, \\ \mathbf{x}\cdot c\mathbf{y} = c(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) &= c\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}, \\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} &= \mathbf{y}^T\cdot\mathbf{x}^T.\end{aligned}$$

Pro takto definovaný součin vektorů jsou splněné dobře známé vlastnosti "skalárního součinu".
Říkáme, že násobení řádkových a sloupcových vektorů je ***distributivní*** (z obou stran) vzhledem ke sčítání a ***komutuje***, tj. je zaměnitelné ***s operací skalárního násobku***.
Poslední rovnost můžeme chápat jako ***"komutativitu" tohoto součinu***; vděčíme za ni komutativitě násobení v tělese K.

Násobení matic III

Nechť $m, n, p \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\mathbf{B} = (b_{jk})_{n \times p}$.

Součinem matic **A**, **B** rozumíme matici

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{B}))_{m \times p}.$$

Všimněme si, že součin matic **A**, **B** je definovaný, pouze pokud se počet sloupců matice **A** rovná počtu řádků matice **B**, t. j. právě tehdy, když řádky matice **A** a sloupce matice **B** mají stejný rozměr.

Násobení matic IV

Součin matic typů $m \times n$ a $n \times p$ je matice typu $m \times p$, což si můžeme lehce zapamatovat v symbolickém tvaru

$$[m \times n] \cdot [n \times p] = [m \times p],$$

připomínajícím rozměrové vztahy ve fyzice.

Součin dvou čtvercových matic typu $n \times n$ je tedy opět matice typu $n \times n$.

Násobení matic V

Prvek na pozici (i, k) matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ dostaneme jako součin i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ a k-tého sloupce matice $\mathbf{B}$, tedy jako výraz

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{B}) = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= a_{i1}b_{1k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} .$$

Leslieho populační model I

Leslieho populační model je diskrétní, věkově strukturovaný model používaný v populační ekologii. Tento model umožňuje předpovídat budoucí velikost a strukturu populace na základě současných demografických údajů.

Patrick H. Leslie vyvinul tento model v roce 1945. Jeho práce *"On the use of matrices in certain population mathematics"* položila základy pro využití maticové algebry v populační biologii.

Leslieho model využívá ***matici přechodu***, která popisuje, jak se populace mění v čase:

- Matice přechodu obsahuje ***míry přežití a plodnosti*** pro každou věkovou skupinu.
- Populace je rozdělena do diskrétních věkových skupin.
- Model předpokládá, že míry přežití a plodnosti zůstávají ***v čase konstantní***.

Leslieho populační model II - Matematické vyjádření

Základní rovnice Leslieho modelu:

$$\mathbf{n}(t+1) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}(t) \tag{3.1}$$

kde:

- $\mathbf{n}(t)$ je vektor populačních velikostí v čase t,
- $\mathbf{L}$ je Leslieho matice,
- $\mathbf{n}(t+1)$ je vektor populačních velikostí v čase $t+1$.

Leslieho populační model III - Leslieho matice L

Leslieho matice $\mathbf{L}$ má tvar:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \cdots & \cdots & F_n \\ P_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

kde F_i jsou míry plodnosti a P_i jsou míry přežití.

Leslieho populační model IV - Aplikace a omezení

Leslieho model se používá v různých oblastech:

- Předpověď populačního růstu ohrožených druhů
- Řízení populací škůdců v zemědělství
- Plánování udržitelného rybolovu
- Studium dynamiky lidské populace

Přestože je Leslieho model užitečný, má několik omezení:

- Předpokládá konstantní míry přežití a plodnosti
- Nebere v úvahu environmentální variabilitu
- Ignoruje hustotní závislost a mezidruhové interakce
- Může být nepřesný pro malé populace kvůli demografické stochasticitě

Abstrakt
Matice nad množinou
Matice nad tělesem
Násobení matic
Algebra matic
Operace s bloky
Násobení vektorů
Součin matic
Příklady na součin

Příklad třígeneračního Leslieho modelu I

Máme ***třígenerační Leslieho model*** s následujícími parametry:

- Míra plodnosti dospělých (F_3): 2 mláďata na jednoho dospělého jedince
- Míra přežití mláďat do dospívající fáze (P_1): 0.5
- Míra přežití dospívajících do dospělé fáze (P_2): 0.8

Leslieho matice pro tento model vypadá následovně:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad třígeneračního Leslieho modelu II

Předpokládejme počáteční populaci: $\mathbf{n}(0) = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$

Populace v čase t = 1

$$\mathbf{n}(1) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Populace v čase t = 2

$$\mathbf{n}(2) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Příklad třígeneračního Leslieho modelu III

Populace v časech t = 3, t = 4, t = 5

$$\mathbf{n}(3) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 40 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{n}(4) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 40 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 40 \\ 32 \end{pmatrix}$$

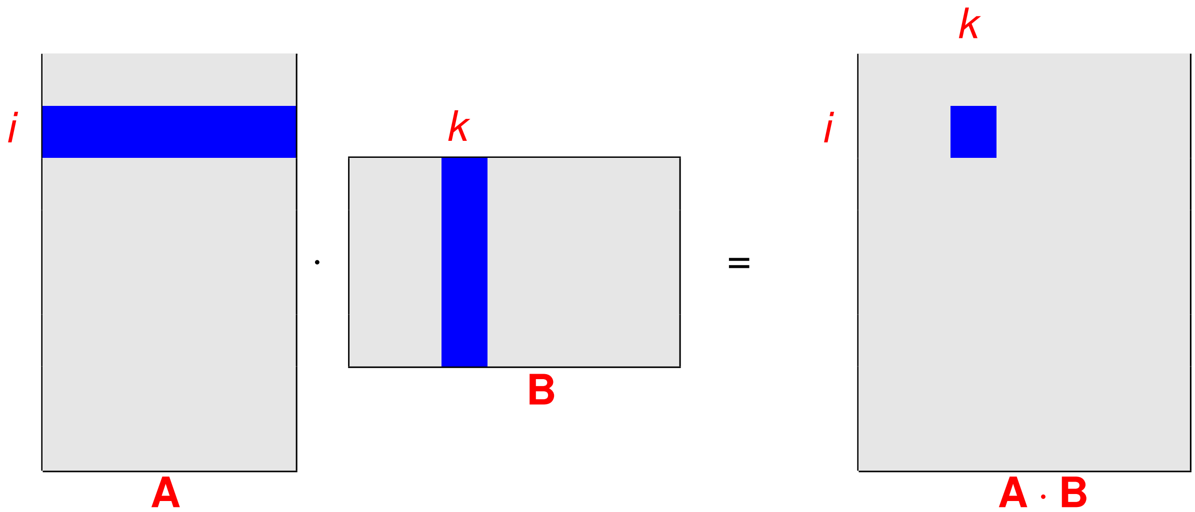
$$\mathbf{n}(5) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}(4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 48 \\ 40 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 24 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Tento příklad ukazuje, jak Leslieho model předpovídá změny ve věkové struktuře populace v čase.

Násobení matic VI

Snadno pak ověříme následující rovnosti

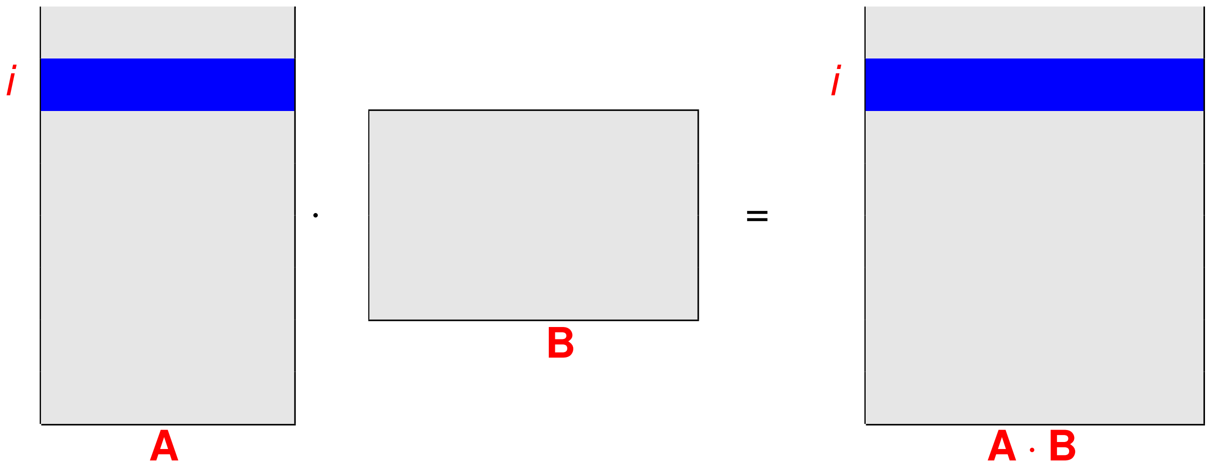
$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}, \quad \mathbf{s}_k(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{s}_k(\mathbf{B}).$$



Násobení matic VII

Snadno pak ověříme následující rovnosti

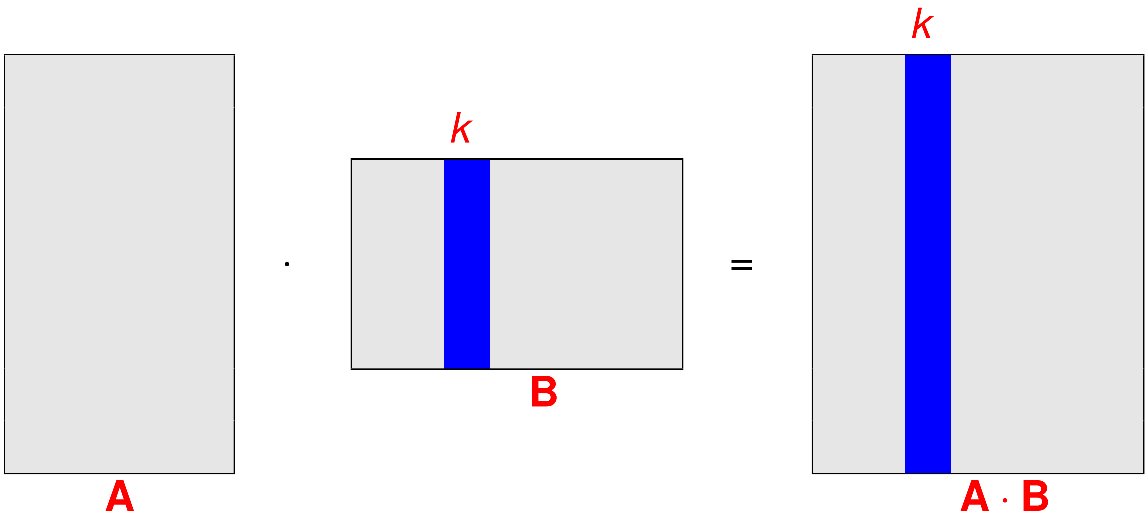
$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}, \quad \mathbf{s}_k(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{s}_k(\mathbf{B}).$$



Násobení matic VIII

Snadno pak ověříme následující rovnosti

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}, \quad \mathbf{s}_k(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{s}_k(\mathbf{B}).$$



Násobení matic IX

Násobení matic je (z obou stran) ***distributivní*** vzhledem ke sčítání. To znamená, že pro libovolné $m, n \in \mathbb{N}$ a matice $\mathbf{A}, \mathbf{A}' \in K^{m\times n}$, $\mathbf{B}, \mathbf{B}' \in K^{n\times p}$ platí

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{B}') &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}',\\ (\mathbf{A}+\mathbf{A}')\cdot\mathbf{B} &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}'\cdot\mathbf{B}.\end{aligned}$$

Z distributivity součinu vektorů vzhledem k jejich součtu je totiž jasné, že (i,k)-tý prvek matice $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{B}')$ je

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot\mathbf{s}_k(\mathbf{B}+\mathbf{B}') &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot(\mathbf{s}_k(\mathbf{B})+\mathbf{s}_k(\mathbf{B}'))\\ &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot\mathbf{s}_k(\mathbf{B})+\mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot\mathbf{s}_k(\mathbf{B}'),\end{aligned}$$

tedy sa rovná (i,k)-tému prvku matice $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}'$. Podobně pro druhou rovnost.

Násobení matic X

Podobně, s využitím zaměnitelnosti součinu vektorů a skalárního násobku můžeme dokázat, že pro libovolný skalár $c \in K$ a všechny matice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$ platí

$$\mathbf{A} \cdot c\mathbf{B} = c(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = c\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Říkáme pak, že násobení matic ***komutuje***, t. j. je zaměnitelné s operací skalárního násobku.

Násobení matic XI

Násobení matic je též ***asociativní***: pro $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$, $\mathbf{C} \in K^{p \times q}$ platí

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}.$$

Pro důkaz toho si stačí uvědomit, že pro libovolné vektory $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in K^{1 \times n}$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_p)^T \in K^{p \times 1}$ platí:

Násobení matic XII

$$\mathbf{x}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{y}) = (x_1,\dots,x_n)\cdot\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{p} b_{1k}y_k\\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} b_{nk}y_k\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}y_k\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j b_{jk}\right) y_k =$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j b_{j1},\dots,\sum_{j=1}^{n} x_j b_{jp}\right)\cdot\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_p\end{pmatrix} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{y}.$$

Násobení matic XIII

Pak pro $1\le i\le m$, $1\le l\le q$, je (i,l)-tý prvek na pozici (i,l) matice $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot\mathbf{s}_l(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{s}_l(\mathbf{C}))\\ &= (\mathbf{r}_i(\mathbf{A})\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{s}_l(\mathbf{C})\\ &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{s}_l(\mathbf{C}),\end{aligned}$$

tedy se rovná (i,l)-tému prvku matice $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$.

Násobení matic XIV

Příklad 3.1

Matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ *zaznamenává vstupní náklady na výrobky, řádky odpovídají výrobkům a sloupce vstupům. Prvek* a_{ij} *je roven počtu jednotek vstupu* j *potřebných k výrobě jednotky výrobku* i*.*

Označme $\mathbf{x}$ *vektor jednotkových cen jednotlivých vstupů, jeho* j*-tá složka udává cenu jednotky* j*-tého vstupu. Spočítáme-li součin* $\mathbf{Ax}$*, bude se jeho* i*-tá složka rovnat*

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n.$$

Pak tedy, i*-tá složka vektoru* $\mathbf{Ax}$ *se rovná výrobní ceně jednotky* i*-tého výrobku. V tomto smyslu vektor* $\mathbf{Ax}$ *popisuje výrobní ceny.*

Násobení matic XV

Příklad 3.1

Podobně se nahlédne, že je-li $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$ *počet výrobků, které chceme vyrobit, pak řádkový vektor* $\mathbf{y}^T\mathbf{A}$ *udává potřebný počet jednotek vstupu –* j*-tá složka se bude se rovnat*

$$y_1a_{1j} + y_2a_{2j} + \cdots + y_ma_{mj},$$

což je počet jednotek vstupu j *potřebných k výrobě daného počtu výrobků.*

Číslo $\mathbf{y}^T\mathbf{Ax}$ *pak popisuje celkové výrobní náklady při počtu výrobků* $\mathbf{y}$ *a vektoru* $\mathbf{x}$ *jednotkových cen jednotlivých vstupů.*

Obsah

Algebra matic I - Jednotková matice

Čtvercovou matici řádu n, která má všechny prvky na diagonále rovné 1 a mimo diagonálu 0, označujeme $\mathbf{I}_n$ a nazýváme ***jednotková matice*** řádu n.
S použitím tzv. ***Kroneckerova symbolu***

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pro } i = j, \\ 0, & \text{pro } i \neq j, \end{cases}$$

můžeme psát

$$\mathbf{I}_n = (\delta_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Algebra matic II - Jednotková matice

Jednotkové matice hrají úlohu neutrálních prvků pro násobení matic.

Pro každou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ platí

$$\mathbf{I}_m \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n.$$

Množina $K^{n \times n}$ všech čtvercových matic řádu n je kromě operace sčítání matic a násobení matic skalárem vybavená asociativní operací násobení, která je (z obou stran) distributivní vzhledem ke sčítání matic, komutuje s operací skalárního násobku a jednotková matice $\mathbf{I}_n$ je její neutrální prvek.

Mluvíme též o ***algebře čtvercových matic typu*** n.

Abstrakt
Matice nad množinou
Matice nad tělesem
Násobení matic
Algebra matic
Operace s bloky

Algebra matic III - Mocniny čtvercových matic

V rámci algebry matic můžeme, podobně jako pro prvky tělesa K, zavést i ***mocniny čtvercových matic***.

Pro $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, klademe $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$ a

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \ldots \cdot \mathbf{A}}_{k\text{-krát}},$$

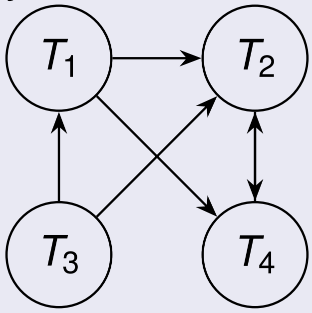
pro $0 < k \in \mathbb{N}$;

tedy $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, atd.

Algebra matic IV - Příklad

Příklad 4.1

Na obrázku jsou vyznačena letecká spojení mezi městy T_1, T_2, T_3, T_4. Chceme určit počet spojení s nejvýše čtyřmi přestupy mezi každou dvojicí měst.



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Informace o spojeních mezi městy uložíme do matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu 4×4 nad $\mathbb{R}$ tak, že a_{ij} definujeme rovné 1, pokud z T_i vede spojení do T_j, a $a_{ij} = 0$ v opačném případě. (Je to tzv. **matice sousednosti grafu.***)*

Abstrakt
Matice nad množinou
Matice nad tělesem
Násobení matic
Algebra matic
Operace s bloky

Algebra matic V - Příklad

Příklad 4.1

Jaký je význam prvku na místě (i, k) v matici $\mathbf{A}^2$? Tento prvek má tvar

$$a_{i1}a_{1k} + a_{i2}a_{2k} + a_{i3}a_{3k} + a_{i4}a_{4k}.$$

Přitom j-tý člen součtu je rovný jedné právě tehdy, když z města T_i vede spojení do města T_j a z T_j vede spojení do T_k, a je rovný nule v ostatních případech. Prvek na místě (i, k) v matici $\mathbf{A}^2$ je proto rovný počtu cest z T_i do T_k s právě jedním přestupem.

Analogicky vidíme, že prvek na místě (i, k) v matici $\mathbf{A}^n$ je rovný počtu cest z T_i do T_k s právě $(n - 1)$ přestupy.

Algebra matic VI - Příklad

Příklad 4.1

Tedy počet cest s nejvýše čtyřmi přestupy z T_i do T_k je tedy prvek na místě (i,k) v matici $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \mathbf{A}^4 + \mathbf{A}^5$. Po krátkém výpočtu máme:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Algebra matic VII není komutativní

Uvědomme si, že pro $n > 1$ – na rozdíl od komutativity násobení v tělese K – násobení matic z pozičních důvodů ***není komutativní*** na $K^{n\times n}$.

Například

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1+1 \end{pmatrix}.$$

Algebra matic VIII není komutativní

Naproti tomu komutativita násobení v tělese K má za důsledek, že pro všechna m, n, p a matice $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$ platí rovnost

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T.$$

Totiž v k-tém řádku a i-tém sloupci matice $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T$ je prvek

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{B}) = \mathbf{s}_k(\mathbf{B})^T \cdot \mathbf{r}_i(\mathbf{A})^T = \mathbf{r}_k(\mathbf{B}^T) \cdot \mathbf{s}_i(\mathbf{A}^T).$$

Algebra matic IX - Příklad modelu dravec - kořist

Lineární model dravec-kořist, také známý jako Lotka-Volterrův model, popisuje dynamiku interakce mezi populací dravců a jejich kořistí. Model je vyjádřen pomocí soustavy dvou diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= \delta xy - \gamma y \end{aligned} \tag{4.1}$$

- $x(t)$ je velikost populace kořisti v čase t
- $y(t)$ je velikost populace dravců v čase t
- α je koeficient růstu populace kořisti
- β je koeficient predace (míra, jakou dravci loví kořist)
- δ je koeficient efektivity predace (míra přeměny ulovené kořisti na nové dravce)
- γ je koeficient úmrtnosti dravců

Algebra matic X - Příklad modelu dravec - kořist

Tento model zachycuje základní dynamiku mezi populacemi:

1. Populace kořisti roste exponenciálně v nepřítomnosti dravců (αx), ale je redukována interakcí s dravci ($-\beta xy$).
2. Populace dravců klesá v nepřítomnosti kořisti ($-\gamma y$), ale roste díky interakci s kořistí (δxy).

Model předpokládá, že:

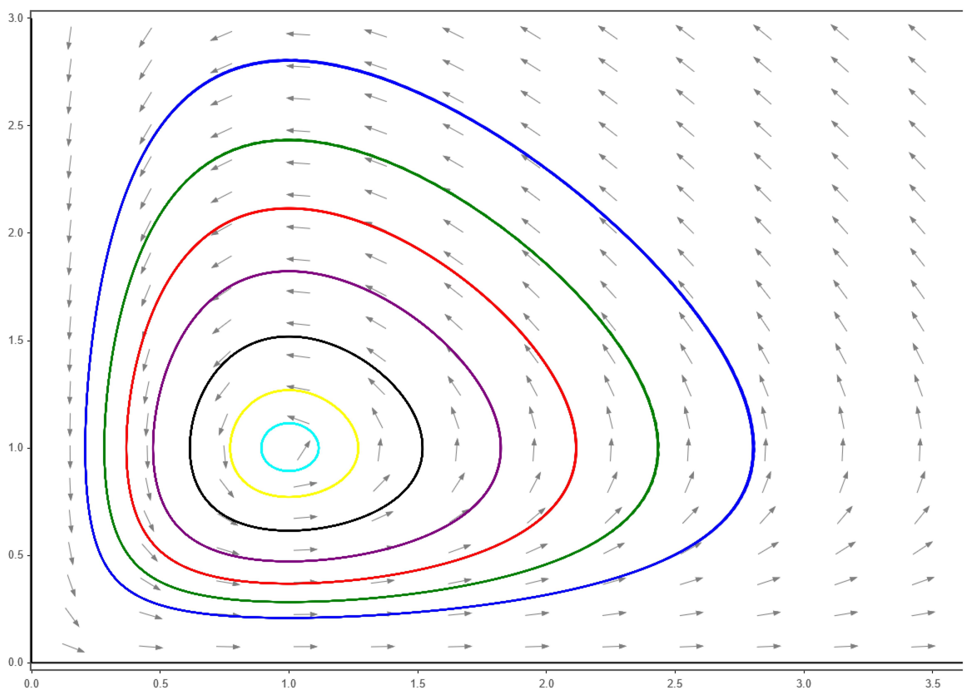
- Kořist má neomezený přístup k potravě.
- Jediným zdrojem potravy pro dravce je kořist.
- Míra predace závisí na pravděpodobnosti setkání dravce a kořisti.
- Prostředí je konstantní a nemění se v čase.

Přestože je tento model značně zjednodušený, poskytuje základní vhled do dynamiky interakce dravec-kořist a slouží jako výchozí bod pro komplexnější modely.

Abstrakt
Matice nad množinou
Matice nad tělesem
Násobení matic
Algebra matic
Operace s bloky

Algebra matic XI - Příklad modelu dravec - kořist

Konkrétní příklad pro $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$, tj. systém



Algebra matic XII - Příklad - Markovův proces

Markovův proces je stochastický proces, který splňuje Markovovu vlastnost - ***budoucí stav závisí pouze na současném stavu***, nikoli na historii stavů.

Nechť $(X_t)_{t \in T}$ je Markovův proces s diskrétním časem a konečným stavovým prostorem $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Lineární model pro tento proces je dán:

$$\mathbf{p}(t+1) = \mathbf{P}\mathbf{p}(t), \tag{4.2}$$

kde:

- $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t))^T$ je vektor pravděpodobností stavů v čase t,
- $\mathbf{P} = (p_{ij})$ je matice přechodových pravděpodobností.

Algebra matic XIII - Příklad - Markovův proces

Přechodová matice $\mathbf{P}$ je stochastická matice, kde p_{ij} reprezentuje pravděpodobnost přechodu ze stavu s_j do stavu s_i:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

přičemž platí:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1, \quad \forall j \in 1, 2, \ldots, n \tag{4.4}$$

Vektor $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)^T$ je stacionární distribuce pravděpodobností, pokud platí:

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{P}\boldsymbol{\pi} \tag{4.5}$$

Algebra matic XIV - Příklad - Markovův proces

Ergodický Markovův řetězec je speciální typ Markovova řetězce, kde se systém v dlouhodobém horizontu dostane do jakéhosi rovnovážného stavu, a to nezávisle na svém výchozím stavu. Jinými slovy, pokud budeme sledovat tento systém dostatečně dlouho, bude trávit určitý podíl času v každém ze svých možných stavů, a to s určitou pravděpodobností.

Házení kostkou

Představte si jednoduchou hru s kostkou. Hodíte kostkou několikrát za sebou. Každý hod je nezávislý na předchozích hodech. Pokud budeme házet dostatečně dlouho, zjistíme, že každá strana kostky padla přibližně stejný počet krát. Tento jednoduchý příklad ilustruje chování ergodického Markovova řetězce.

Algebra matic XV - Příklad - Markovův proces

Pro ergodický Markovův řetězec platí:

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{p}(t) = \pi \tag{4.6}$$

nezávisle na počátečním rozdělení $\mathbf{p}(0)$.

Lineární model Markovova procesu nachází využití v mnoha oblastech, včetně:

- Analýzy finančních trhů
- Modelování biologických systémů, šíření epidemií
- Simulace různých systémů, od fyzikálních procesů až po sociální interakce.
- Zpracování přirozeného jazyka (překlady, chatboti)
- Predikce počasí
- Algoritmů pro simulaci, strojového učení

Obsah

Operace s blokovými maticemi - součet a skalární násobek

Operace maticového součtu a skalárního násobku můžeme na blokových maticích rozložit na jednotlivé bloky.

Jsou-li $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{ij})_{k\times l}$, $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{ij})_{k\times l}$ blokové matice nad číselným tělesem K a odpovídající si bloky $\mathbf{A}_{ij}$, $\mathbf{B}_{ij}$ se stejným typem $m_i \times n_j$, tak jejich ***součet je opět bloková matice***

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij})_{k\times l}$$

s bloky stejných typů.

S ***operací skalárního násobku*** je to ještě jednodušší, totiž nemusíme se starat o shodnost rozměrů jednotlivých bloků.

$$c\mathbf{A} = (c\mathbf{A}_{ij})_{k\times l}.$$

Operace s blokovými maticemi I - součin

Bloková struktura sa přenáší i na součin matic za podmínky, že sloupce první matice jsou ve stejném pořadí rozděleny na stejný počet stejně velkých skupin, řekněme $n_1 + n_2 + \ldots + n_\nu$, jako sloupce druhé matice. Tedy pokud $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{ij})_{\mu\times\nu}$, $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{jk})_{\nu\times\vartheta}$ jsou blokové matice nad K, přičemž blok $\mathbf{A}_{ij}$ je typu $m_i \times n_j$ a blok $\mathbf{B}_{jk}$ typu $n_j \times p_k$, tak jejich součin je bloková matice tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{C}_{ik})_{\mu\times\vartheta}$, kde blok

$$\mathbf{C}_{ik} = \mathbf{A}_{i1} \cdot \mathbf{B}_{1k} + \mathbf{A}_{i2} \cdot \mathbf{B}_{2k} + \ldots + \mathbf{A}_{in} \cdot \mathbf{B}_{nk}$$

je typu $m_i \times p_k$.

Blokové matice násobíme stejně jako "obyčejné" matice, jen s tím rozdílem, že součet resp. součin v tělese K nahradíme součtem resp. součinem matic.

Abstrakt
Matice nad množinou
Matice nad tělesem
Násobení matic
Algebra matic
Operace s bloky

Operace s blokovými maticemi II - diagonála

Jednotkové matice $\mathbf{I}_n$ jsou příkladem tzv. diagonálních matic.

Čtvercovou matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ nazýváme ***diagonální***, pokud $a_{ij} = 0$ pro všechny $i \neq j$, tj. pokud všechny její prvky mimo diagonálu jsou nuly.

Diagonální matici, která má na diagonále postupně prvky $d_1, d_2, \ldots, d_n \in K$ značíme $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Tedy např.

$$\mathbf{I}_n = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n\text{-krát}}).$$

Podobně můžeme definovat i tzv. blokově diagonální matice.

Operace s blokovými maticemi III - diagonála

Pokud $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$ jsou čtvercové matice řádů $n_1, n_2, \ldots, n_k$, tak ***blokově diagonální maticí*** s bloky $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$ nazýváme čtvercovou blokovou matici

$$\mathrm{diag}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{A}_k \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{0}$ nacházející se na pozici (i, j) označuje nulovou matici $\mathbf{0}_{n_i n_j}$.

Pravidlo o součinu blokových matic se redukuje na zvlášť jednoduchý tvar pro blokově diagonální matice – násobení funguje ***diagonálně po složkách***.

Operace s blokovými maticemi IV - diagonála

Pokud $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k)$, $\mathbf{B} = \mathrm{diag}(\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_k)$ jsou blokově diagonální matice, přičemž odpovídající si bloky $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}_i$ jsou čtvercové matice stejného řádu n_i, jejich součin je blokově diagonální matice tvaru

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathrm{diag}(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{B}_k)$$

s čtvercovými bloky řádů $n_1, \ldots, n_k$.

Speciálně, pro "obyčejné" diagonální matice platí

$$\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \cdot \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n) = \\ \mathrm{diag}(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n).$$

Platí analogická pravidla pro součet a skalární násobek (blokově) diagonálních matic.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathrm{diag}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{A}_k + \mathbf{B}_k) \\ c\mathbf{A} &= \mathrm{diag}(c\mathbf{A}_1, \ldots, c\mathbf{A}_k) \end{aligned}$$