1. KOMPLEXNÍ ČÍSLA a TĚLESA

Jan Paseka

Ústav matematiky a statistiky
Masarykova univerzita

8. září 2024

Abstrakt
Motivace
Algebraický tvar
Geometrický tvar
Násobení komplexních čí-
sel komplexní jednotkou
Tělesa
Algebraická struktura

Obsah

Abstrakt

V této kapitole připomeneme základní vlastnosti komplexních čísel.

Dále zavedeme pojem obecného tělesa K. Prvky tělesa budeme nazývat **skaláry**.

Obsah

Motivace

V reálných číslech nemá rovnice $x^2 = -1$ žádné řešení. Tato skutečnost nás motivuje k rozšíření množiny reálných čísel tak, abychom získali řešení této rovnice a zároveň zachovali všechna pravidla pro sčítání a násobení.

Zavedeme nový symbol i, pro který platí:

$$i^2 = -1$$

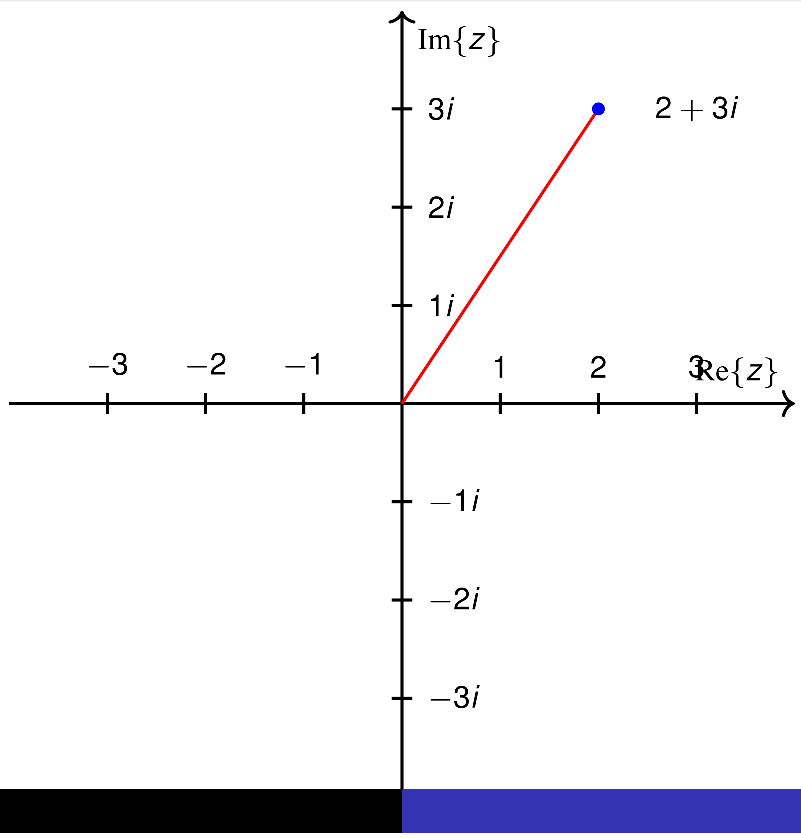
Toto i nazveme ***imaginární jednotkou***.

Definice 1

Komplexní číslo je číslo z ve tvaru $a + bi$, kde a spolu s b jsou reálná čísla a i je imaginární jednotka. Mluvíme o **algebraickém tvaru**.

Abstrakt
Motivace
Algebraický tvar
Geometrický tvar
Násobení komplexních čísel komplexní jednotkou
Tělesa
Algebraická struktura

Motivace



Obsah

Algebraický tvar komplexních čísel

Komplexní číslo z v algebraickém tvaru zapisujeme jako:

$$z = a + bi$$

kde:

- a je reálná část komplexního čísla z
- b je imaginární část komplexního čísla z

Speciální případy:

- Pokud $b = 0$, pak $z = a$ je reálné číslo.
- Pokud $a = 0$, pak $z = bi$ je ryze imaginární číslo.
- Pokud $a = 0$ a $b = 0$, pak $z = 0$ je nulové komplexní číslo.

Sčítání a násobení

Dvě komplexní čísla $z_1 = a + bi$ a $z_2 = c + di$ jsou si rovna, právě když:

$$a = c \quad \text{a} \quad b = d$$

Pro zachování pravidel ***sčítání dvou komplexních čísel*** definujeme:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

a ***násobení dvou komplexních čísel*** definujeme:

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + adi + bci - bd \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

Abstrakt
Motivace
Algebraický tvar
Geometrický tvar
Násobení komplexních čísel komplexní jednotkou
Tělesa
Algebraická struktura
Zápis
Operace

Důsledky

Díky tomuto rozšíření jsme získali:

- Řešení rovnice $x^2 = -1$, konkrétně $x = i$ a $x = -i$
- Možnost řešit kvadratické rovnice s negativním diskriminantem
- Zachování všech algebraických pravidel pro sčítání a násobení

Pro komplexní číslo $z = a + bi$ definujeme ***komplexně sdružené číslo*** $\bar{z}$ jako:

$$\bar{z} = a - bi$$

Pro nenulové komplexní číslo $z = a + bi$ existuje ***multiplikativní inverze***:

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

Dělení a absolutní hodnota

Pro $z_1 = a + bi$ a $z_2 = c + di$ ($z_2 \neq 0$):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Pro $z = a + bi$ je ***absolutní hodnota*** z:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Výhody algebraického tvaru

- Snadná interpretace reálné a imaginární části
- Jednoduché sčítání a odčítání

Algebraický tvar komplexních čísel poskytuje intuitivní a praktický způsob reprezentace a manipulace s komplexními čísly v matematice a jejích aplikacích.

Obsah

Geometrický tvar

Geometrický tvar komplexních čísel, známý také jako ***polární tvar***, poskytuje alternativní způsob reprezentace komplexních čísel, který zdůrazňuje jejich geometrickou interpretaci.

Definice 2

Komplexní číslo z v geometrickém tvaru zapisujeme jako:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

kde:

- *r je absolutní hodnota (modul) komplexního čísla*
- *θ je argument komplexního čísla (úhel s kladnou reálnou osou)*

Vztah s algebraickým tvarem a Eulerův vzorec

Pro komplexní číslo $z = a + bi$ v algebraickém tvaru platí:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{(s patřičnou korekcí pro různé kvadranty)}$$

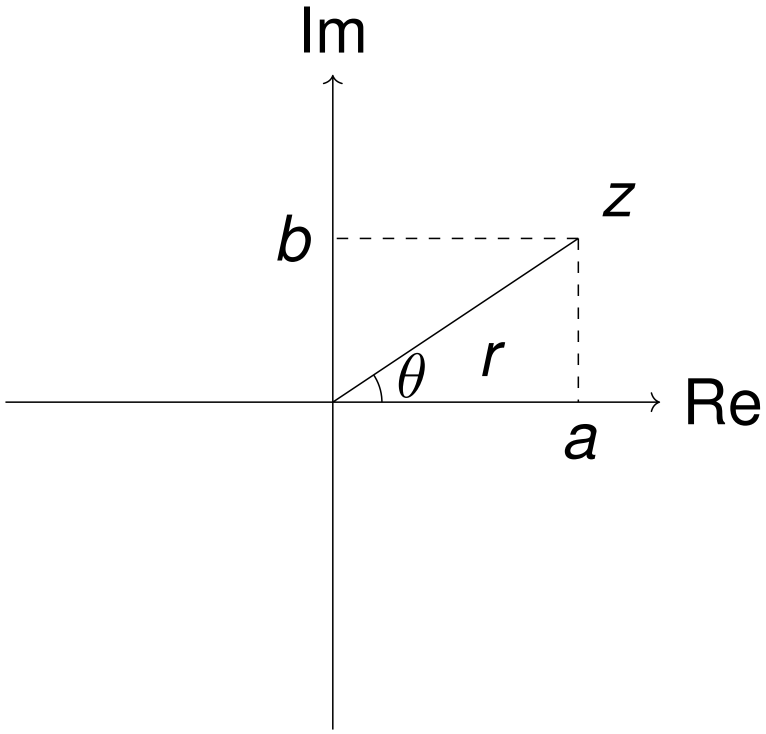
Eulerův vzorec spojuje exponenciální funkci s goniometrickými funkcemi:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Díky tomu můžeme geometrický tvar zapsat také jako:

$$z = re^{i\theta}$$

Geometrická interpretace



Násobení v geometrickém tvaru

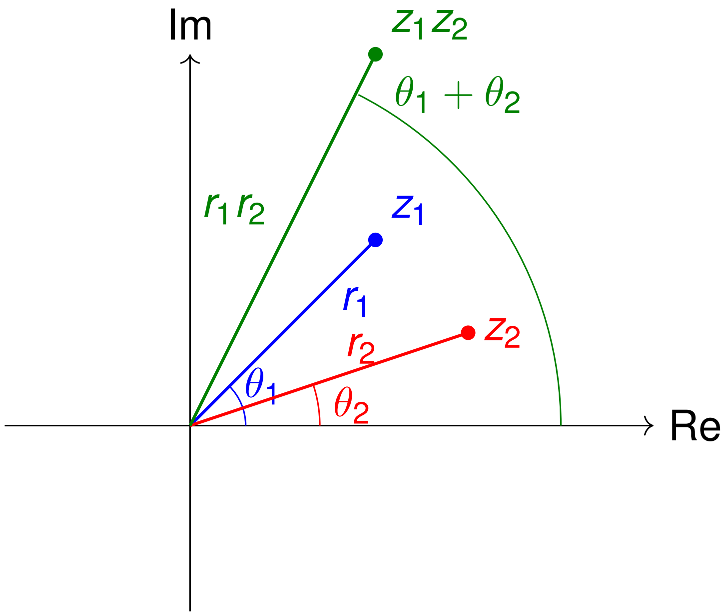
Pro $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ a $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

To znamená, že při násobení komplexních čísel:

- Násobíme jejich moduly
- Sčítáme jejich argumenty

Geometrický význam násobení



$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

Mocniny komplexních čísel

Pro komplexní číslo $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ a přirozené číslo n platí:

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

Toto je známé jako ***de Moivreova věta***.

Výhody geometrického tvaru

- Snadná vizualizace komplexních čísel v komplexní rovině
- Zjednodušení násobení a umocňování komplexních čísel
- Přímá souvislost s goniometrickými funkcemi

Obsah

Násobení komplexních čísel komplexní jednotkou

Násobení komplexního čísla komplexní jednotkou má zajímavý geometrický význam - způsobuje rotaci bodu reprezentujícího komplexní číslo kolem počátku komplexní roviny.

Komplexní jednotka je komplexní číslo s absolutní hodnotou 1. V polárním tvaru ji můžeme zapsat jako:

$$u = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

kde θ je libovolný reálný úhel.

Mějme komplexní číslo $z = r(\cos\phi + i\sin\phi) = re^{i\phi}$. Při násobení z komplexní jednotkou u dostaneme:

$$\begin{aligned} uz &= (\cos\theta + i\sin\theta)(r\cos\phi + ir\sin\phi) \\ &= r(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + ir(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) \\ &= r[\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)] = re^{i(\theta+\phi)} \end{aligned}$$

Násobení komplexních čísel komplexní jednotkou - geometrická interpretace

Z výsledku výše vidíme, že násobení komplexním číslem z komplexní jednotkou u:

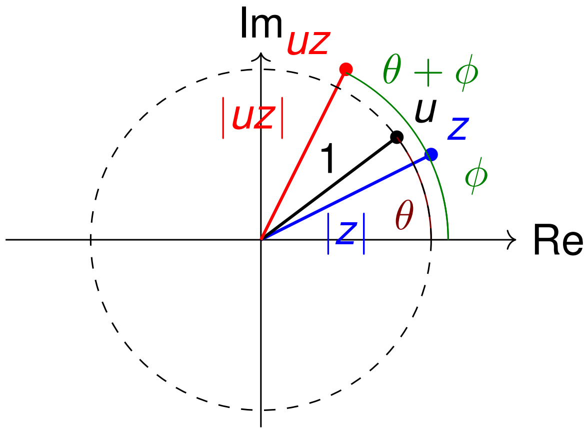
- Zachovává absolutní hodnotu (modul) r původního čísla z
- Přičítá argument θ komplexní jednotky u k argumentu ϕ čísla z

Geometricky to znamená, že bod reprezentující z v komplexní rovině se otočí o úhel θ kolem počátku souřadnic.

Speciální případy

- Násobení číslem i (tj. $\theta = 90$) otáčí bod o 90° proti směru hodinových ručiček.
- Násobení číslem -1 (tj. $\theta = 180$) otáčí bod o 180°.
- Násobení číslem $-i$ (tj. $\theta = 270$) otáčí bod o 90° ve směru hodinových ručiček.

Násobení komplexních čísel komplexní jednotkou - geometrická interpretace



Násobení komplexního čísla komplexní jednotkou je elegantní způsob, jak provádět rotace v komplexní rovině. Tento koncept má široké uplatnění v mnoha oblastech matematiky a fyziky, včetně zpracování signálů, kvantové mechaniky a teorie grup.

Obsah

Základní pojmy

$\mathbb{N}$ – množina všech přirozených čísel,
$\mathbb{Z}$ – množina všech celých čísel,
$\mathbb{Q}$ – množina všech racionálních čísel,

$\mathbb{R}$ – množina všech reálnych čísel,
$\mathbb{C}$ – množina všech komplexních čísel.

$$\begin{array}{c} \mathbb{C} \\ \subseteq \;| \\ \mathbb{R} \\ \subseteq \;| \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

Nulu považujeme za přirozené číslo, tj. $0 \in \mathbb{N}$.

Prvky výše uvedených číselných oborů $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ nazýváme často ***skaláry***. V tomto případě pak budeme mluvit o ***číselném tělese***.

Na každé z množin $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ jsou definované dvě binární operace, ***sčítaní*** $+$ a ***násobení*** $\cdot$.

Struktura číselných oborů I

Obě tyto operace jsou asociativní a komutativní.

Násobení je (z obou stran) ***distributivní*** vzhledem ke sčítání, tj. pro všechny prvky x, y, z příslušné množiny platí

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \qquad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Číselný obor $\mathbb{N}$ je v porovnaní s obory $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ "chudší" – totiž rovnice tvaru $x + a = b$ mají v oborech $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ řešení $x = b - a$ pre libovolné a, b, ale v $\mathbb{N}$ je takováto rovnice řešitelná, pokud $a \leq b$.

Obory $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ jsou však "bohatší" nejen v porovnání s $\mathbb{N}$, ale i s $\mathbb{Z}$ – rovnice tvaru $ax = b$ mají v oborech $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ řešení pro libovolné $a \neq 0$ a b, přičemž v $\mathbb{N}$ či $\mathbb{Z}$ jsou řešitelné, pouze pokud a je dělitelem b.

Axiomy tělesa I

Tělesem nazýváme množinu K s dvěma význačnými prvky – ***nulou*** 0 a ***jedničkou*** 1 – a dvěma binárními operacemi na K – ***sčítáním*** $+$ a ***násobením*** $\cdot$ – takovými, že platí

$$(\forall a, b \in K)(a + b = b + a), \ (\forall a, b \in K)(a \cdot b = b \cdot a),$$

$$(\forall a, b, c \in K)(a + (b + c) = (a + b) + c),$$
$$(\forall a, b, c \in K)(a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c),$$

$$(\forall a \in K)(0 + a = a), \qquad (\forall a \in K)(1 \cdot a = a),$$

$$(\forall a \in K)(\exists b \in K)(a + b = 0),$$
$$(\forall a \in K \setminus \{0\})(\exists b \in K)(a \cdot b = 1),$$

$$(\forall a, b, c \in K)(a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)), \quad 0 \neq 1.$$

Axiomy tělesa II

Sčítání a násobení v tělese jsou komutativní a asociativní operace a násobení je distributivní vzhledem ke sčítání.

0 je neutrální prvek sčítání a 1 je neutrální prvek násobení a tyto prvky jsou navzájem různé.

Prvek $b \in K$ takový, že $a + b = 0$, je k danému $a \in K$ určený jednoznačně.
Tento jednoznačně určený prvek k danému a označujeme $-a$ a nazýváme ***opačný prvek*** k a. Místo $a + (-b)$ píšeme jen $a - b$.

Analogicky se lze přesvědčit, že i prvek $b \in K$ takový, že $a \cdot b = 1$ je k danému $0 \neq a \in K$ určený jednoznačně – označujeme ho a^{-1} nebo $\frac{1}{a}$, případně $1/a$ a nazýváme ***inverzní prvek*** k a nebo ***převrácená hodnota*** prvku a.

Místo $a \cdot b^{-1}$ píšeme též $\frac{a}{b}$ nebo a/b.

Vlastnosti těles I

Tvrzení 5.1

Buď K těleso. Potom pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $a, b, c, b_1, \ldots, b_n \in K$ platí

(a) $a + b = a + c \;\Rightarrow\; b = c$,

(b) $(a \cdot b = a \cdot c \;\&\; a \neq 0) \;\Rightarrow\; b = c$,

(c) $a \cdot 0 = 0$,

(d) $a \cdot b = 0 \;\Rightarrow\; (a = 0 \vee b = 0)$,

(e) $-a = (-1) \cdot a$,

(f) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$,

(g) $a \cdot (b_1 + \ldots + b_n) = a \cdot b_1 + \ldots + a \cdot b_n$.

Doplňme, že podmínky (a) a (b) sa nazývají ***zákony o krácení*** pro sčítaní resp. násobení v tělese.

Abstrakt Motivace Algebraický tvar | Geometrický tvar Násobení komplexních čísel komplexní jednotkou | Tělesa Algebraická struktura | Číselné obory Axiomy tělesa | Vlastnosti těles Konečná tělesa

Vlastnosti těles II

Podmínka (e) nám umožňuje zavést libovolné celočíselné násobky prvků z tělesa.

Pro $a \in K$, $n \in \mathbb{N}$ klademe $(-n)a = -(na) = n(-a)$.

Podobně lze pro nenulové prvky tělesa zavést i libovolné celočíselné mocniny. Pro $0 \neq a \in K$, $n \in \mathbb{N}$ klademe $a^{-n} = (a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$.

$$0a = 0, \quad 1a = a, \quad a^0 = 1, \quad a^1 = a,$$

$$\begin{array}{ll}
n(a+b) = na + nb, & (m+n)a = ma + na, \\
(mn)a = m(na), & (mn)(a \cdot b) = (ma) \cdot (nb), \\
(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, & n < 0 \;\Rightarrow\; a \neq 0 \neq b, \\
a^{m+n} = a^m \cdot a^n, & (m < 0 \vee n < 0) \;\Rightarrow\; a \neq 0, \\
a^{mn} = (a^m)^n, & (m < 0 \vee n < 0) \;\Rightarrow\; a \neq 0 \\
 & \forall a, b \in K,\; m, n \in \mathbb{Z}.
\end{array}$$

Vlastnosti těles III

Nechť K je těleso a $L \subseteq K$. Říkáme, že L je ***podtěleso*** tělesa K, pokud $0, 1 \in L$ a pro všechna $a, b \in L$ platí $a + b \in L$, $ab \in L$, $-a \in L$ a, pokud $a \neq 0$, tak i $a^{-1} \in L$.

Podtěleso tělesa K je tedy jeho podmnožina L, která obsahuje nulu a jedničku a je uzavřená vzhledem ke sčítání, násobení, opačnému a inverznímu prvku. Zřejmě každé podtěleso tělesa K je s těmito operacemi zúženými z K na L i samo tělesem. Říkáme pak, že těleso K je ***rozšířením*** tělesa L.

Zřejmě těleso $\mathbb{Q}$ je podtělesem tělesa $\mathbb{R}$ i tělesa $\mathbb{C}$; těleso $\mathbb{C}$ je rozšířením těles $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$.

Vlastnosti těles IV

Charakteristikou tělesa K, píšeme $\mathrm{char} K$, nazýváme nejmenší kladné celé číslo n takové, že $n1 = 0$; pokud takové n neexistuje, t. j. $n1 \neq 0$ pro každé celé $n > 0$, říkáme že K má charakteristiku ∞ (někteří autoři definují $\mathrm{char} K = 0$).

Je-li těleso K rozšířením tělesa L, tak obě tělesa K a L mají tutéž jedničku i nulu, a proto $\mathrm{char} K = \mathrm{char} L$.

Zřejmě $\mathrm{char}\mathbb{Q} = \mathrm{char}\mathbb{R} = \mathrm{char}\mathbb{C} = \infty$.

Věta 5.2

Nechť K je těleso. Potom $\mathrm{char} K$ je rovna ∞ nebo prvočíslu.

Konečná tělesa I

V tomto odstavci si ukážeme příklady těles, jejichž charakteristika není ∞. Z tohoto důvodu se tato tělesa podstatně liší od nám známých číselných těles.

Totiž, pro každé prvočíslo p sestrojíme jisté konečné těleso $\mathbb{Z}_p$, které má p prvků a charakteristiku p. Naopak, dříve uvedená číselná tělesa jsou nekonečná.

Pro potřeby matematické analýzy, tedy i z hlediska fyzikálních aplikací, jsou nejdůležitějšími tělesy $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$. Konečná tělesa však v současnosti sehrávají důležitou úlohu např. v teorii kódování a kryptografii.

Abstrakt
Motivace
Algebraický tvar
Geometrický tvar
Násobení komplexních čísel komplexní jednotkou
Tělesa
Algebraická struktura
Číselné obory
Axiomy tělesa
Vlastnosti těles
Konečná tělesa

Konečná tělesa II

Pro každé kladné celé číslo n označme

$$\mathbb{Z}_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k < n\} = \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Množinu $\mathbb{Z}_n$ nazýváme ***množinou zbytkových tříd modulo*** n. Na této množině zavedeme dvě binární operace – sčítání $\oplus$ a násobení $\odot$ (je nutné odlišit sčítání a násobení v $\mathbb{Z}_n$ od příslušných operací $+$ a $\cdot$ v $\mathbb{Z}$).

Pro $a, b \in \mathbb{Z}_n$ klademe

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \text{zbytek po dělení } a + b \text{ číslem } n, \\ a \odot b &= \text{zbytek po dělení } a \cdot b \text{ číslem } n. \end{aligned}$$

Konečná tělesa III

$\oplus$ a $\odot$ jsou asociativní a komutativní operace na $\mathbb{Z}_n$, 0 je neutrální prvek sčítání a, pro $n > 1$, 1 je neutrální prvek násobení.

Násobení je distributivní vzhledem ke sčítání a dále $\ominus a = n - a$ je opačný prvek k $a \in \mathbb{Z}_n$.

Věta 5.3

Množina $\mathbb{Z}_n$ s operacemi $\oplus$ a $\odot$ je těleso právě tehdy, když n je prvočíslo.

Konečná tělesa IV

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Multiplikativní tabulky sčítání a násobení v tělese $\mathbb{Z}_5$.

Obsah

Algebraická struktura

Množina komplexních čísel $\mathbb{C}$ s operacemi sčítání a násobení tvoří těleso, které je algebraicky uzavřené. To znamená, že každá polynomiální rovnice s komplexními koeficienty má alespoň jedno komplexní řešení.

Nechť K je libovolné těleso a $m, n \in \mathbb{N}$.

Maticí typu $m \times n$, nebo též $m \times n$*-rozměrnou maticí* nad tělesem K rozumíme obdélníkovou tabulku

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

sestávající z prvků K.