

# 5. VEKTOROVÉ PROSTORY

Jan Paseka

Ústav matematiky a statistiky  
Masarykova univerzita

14. října 2024

# Obsah

- 1 Motivace
  - Geometrická interpretace vektorů
- 2 Tělesa a základní číselné obory  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$
- 3 Vektorové prostory
- 4 Matice nad vektorovým prostorem
- 5 Lineární zobrazení

# Abstrakt

V této kapitole zavedeme dva pojmy, které budou hrát v následujícím výkladu klíčovou úlohu a dokážeme o nich několik jednoduchých tvrzení. Půjde o pojem **tělesa** a **vektorového prostoru**. Dále prozkoumáme pojem *lineárního zobrazení*.

# Abstrakt

V této kapitole zavedeme dva pojmy, které budou hrát v následujícím výkladu klíčovou úlohu a dokážeme o nich několik jednoduchých tvrzení. Půjde o pojem **tělesa** a **vektorového prostoru**. Dále prozkoumáme pojem *lineárního zobrazení*.

Prvky tělesa budeme nazývat **skaláry** a prvky vektorového prostoru **vektory**.

# Obsah

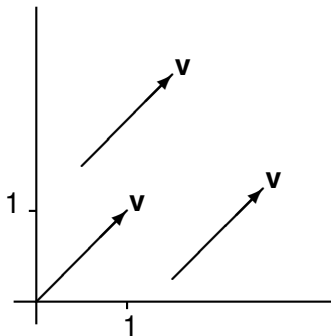
- 1 Motivace
  - Geometrická interpretace vektorů
- 2 Tělesa a základní číselné obory  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$
- 3 Vektorové prostory
- 4 Matice nad vektorovým prostorem
- 5 Lineární zobrazení

# Geometrická interpretace vektorů

Vektory v rovině či v prostoru si představujeme jako orientované úsečky, tj. úsečky, jejichž jeden krajní bod považujeme za počáteční a druhý za koncový – ten je označený obvykle šipkou.

# Geometrická interpretace vektorů

Vektory v rovině či v prostoru si představujeme jako orientované úsečky, tj. úsečky, jejichž jeden krajní bod považujeme za počáteční a druhý za koncový – ten je označený obvykle šipkou.



Přitom dvě stejně dlouhé, rovnoběžné a souhlasně orientované úsečky představují ten stejný vektor – říkáme, že jsou **umístění** téhož vektoru.

# Geometrická interpretace vektorů

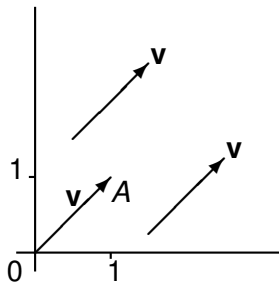
Zvolíme-li si nějaký pevný bod  $O$ , pak všechny vektory v rovině či v prostoru můžeme jednoznačně reprezentovat jako orientované úsečky  $\overrightarrow{OA}$  s počátkem v  $O$ .



# Geometrická interpretace vektorů

Zvolíme-li si nějaký pevný bod  $O$ , pak všechny vektory v rovině či v prostoru můžeme jednoznačně reprezentovat jako orientované úsečky  $\overrightarrow{OA}$  s počátkem v  $O$ .

Jejich koncem může být libovolný bod  $A$  roviny či prostoru, bod  $O$  nevyjímaje – orientovaná úsečka  $\overrightarrow{OO}$  totiž představuje tzv. nulový vektor.



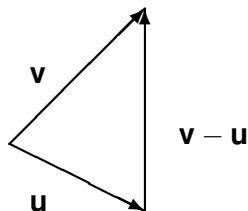
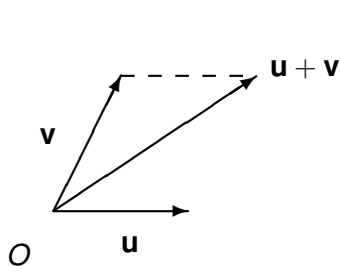
# Geometrická interpretace vektorů

Vektory v rovině či v prostoru můžeme sčítat pomocí tzv. ***vektorového rovnoběžníku***.

# Geometrická interpretace vektorů

Vektory v rovině či v prostoru můžeme sčítat pomocí tzv. **vektorového rovnoběžníku**.

Součet vektorů  $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$  je potom znázorněn orientovanou uhlopříčkou  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{OC}$  rovnoběžníka, jehož dvě přilehlé strany tvoří úsečky  $OA$ ,  $OB$ .



# Geometrická interpretace vektorů

Vektory můžeme rovněž násobit libovolnými skaláry, tj. v našem případě reálnými čísly:

# Geometrická interpretace vektorů

Vektory můžeme rovněž násobit libovolnými skaláry, tj. v našem případě reálnými čísly:

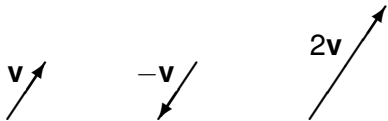
pokud  $c \in \mathbb{R}$  a  $\mathbf{v}$  je vektor, tak  $c\mathbf{v}$  je vektor, tj. orientovaná úsečka s počátkem v  $O$ , jejíž délka je  $|c|$ -násobkem délky úsečky  $\mathbf{v}$ , leží na té stejné přímce jako  $\mathbf{v}$  a je orientovaná souhlasně s  $\mathbf{v}$ , pokud  $c > 0$ , resp. nesouhlasně s  $\mathbf{v}$ , pokud  $c < 0$

# Geometrická interpretace vektorů

Vektory můžeme rovněž násobit libovolnými skaláry, tj. v našem případě reálnými čísly:

pokud  $c \in \mathbb{R}$  a  $\mathbf{v}$  je vektor, tak  $c\mathbf{v}$  je vektor, tj. orientovaná úsečka s počátkem v  $O$ , jejíž délka je  $|c|$ -násobkem délky úsečky  $\mathbf{v}$ , leží na té stejné přímce jako  $\mathbf{v}$  a je orientovaná souhlasně s  $\mathbf{v}$ , pokud  $c > 0$ , resp. nesouhlasně s  $\mathbf{v}$ , pokud  $c < 0$

(je-li  $c = 0$  nebo  $\mathbf{v}$  je nulový vektor, tak, samozřejmě, i  $c\mathbf{v}$  je nulový vektor, takže nezáleží na jeho směru ani orientaci).



# Geometrická interpretace vektorů

Pokud si mimo počátek  $O$  zvolíme v rovině či prostoru ještě dvě resp. tři souřadné osy, tj. navzájem kolmé přímky procházející počátkem, a na každé z nich jeden bod ve stejné jednotkové vzdálenosti od počátku, dostaneme pravouhlý souřadnicový systém v rovině či v prostoru.

# Geometrická interpretace vektorů

Pokud si mimo počátek  $O$  zvolíme v rovině či prostoru ještě dvě resp. tři souřadné osy, tj. navzájem kolmé přímky procházející počátkem, a na každé z nich jeden bod ve stejné jednotkové vzdálenosti od počátku, dostaneme pravouhly souřadnicový systém v rovině či v prostoru.

Každý bod roviny či prostoru je potom jednoznačně určený uspořádanou dvojicí, resp. trojicí svých souřadnic a naopak, každá dvojice resp. trojice souřadnic jednoznačně určuje nějaký bod roviny či prostoru.



# Geometrická interpretace vektorů

Pokud si mimo počátek  $O$  zvolíme v rovině či prostoru ještě dvě resp. tři souřadné osy, tj. navzájem kolmé přímky procházející počátkem, a na každé z nich jeden bod ve stejné jednotkové vzdálenosti od počátku, dostaneme pravouhlý souřadnicový systém v rovině či v prostoru.

Každý bod roviny či prostoru je potom jednoznačně určený uspořádanou dvojicí, resp. trojicí svých souřadnic a naopak, každá dvojice resp. trojice souřadnic jednoznačně určuje nějaký bod roviny či prostoru.

Při pevném souřadnicovém systému tak můžeme množinu všech vektorů v rovině ztotožnit s množinou  $\mathbb{R}^2$  a množinu všech vektorů v prostoru s množinou  $\mathbb{R}^3$ .

# Geometrická interpretace vektorů

Jsou-li (při takovémto ztotožnění)  $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  
 $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$  dva vektory v rovině, tak snadno ověříme, že  
pro jejich součet  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ , daný vektorovým rovnoběžníkem, platí

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

# Geometrická interpretace vektorů

Jsou-li (při takovémto ztotožnění)  $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  
 $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$  dva vektory v rovině, tak snadno ověříme, že  
pro jejich součet  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ , daný vektorovým rovnoběžníkem, platí

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

Je-li  $c \in \mathbb{R}$ , pak pro skalární násobek  $c\mathbf{u}$  dostáváme

$$c\mathbf{u} = c(u_1, u_2) = (cu_1, cu_2).$$

Podobně to můžeme ověřit pro vektory v prostoru, tj.  
uspořádané trojice reálných čísel.

# Geometrická interpretace vektorů

Navíc si všimněme, že předpoklady kolmosti souřadných os a rovnosti jednotkových délek v jednotlivých směrech nehrály v našich úvahách žádnou roli.

# Geometrická interpretace vektorů

Navíc si všimněme, že předpoklady kolmosti souřadných os a rovnosti jednotkových délek v jednotlivých směrech nehrály v našich úvahách žádnou roli.

Stačí, aby systém souřadných os tvořily dvě různoběžné přímky (v rovině) resp. tři přímky neležící v rovině (v prostoru) protínající se v počátku  $O$ .

# Geometrická interpretace vektorů

Navíc si všimněme, že předpoklady kolmosti souřadných os a rovnosti jednotkových délek v jednotlivých směrech nehrály v našich úvahách žádnou roli.

Stačí, aby systém souřadných os tvořily dvě různoběžné přímky (v rovině) resp. tři přímky neležící v rovině (v prostoru) protínající se v počátku  $O$ .

Za jednotkové délky ve směrech jednotlivých souřadných os můžeme zvolit délky libovolných (ne nutně stejně dlouhých) úseček.

# Obsah

- 1 Motivace
- 2 **Tělesa a základní číselné obory  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$** 
  - Základní číselné obory
  - Axiomy tělesa
  - Vlastnosti těles
- 3 Konečná tělesa
- 3 Vektorové prostory
- 4 Matice nad vektorovým prostorem
- 5 Lineární zobrazení

# Základní pojmy

- $\mathbb{N}$  – množina všech přirozených čísel,
- $\mathbb{Z}$  – množina všech celých čísel,
- $\mathbb{Q}$  – množina všech racionálních čísel,



# Základní pojmy

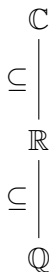
$\mathbb{N}$  – množina všech přirozených čísel,

$\mathbb{Z}$  – množina všech celých čísel,

$\mathbb{Q}$  – množina všech racionálních čísel,

$\mathbb{R}$  – množina všech reálných čísel,

$\mathbb{C}$  – množina všech komplexních čísel.



# Základní pojmy

$\mathbb{N}$  – množina všech přirozených čísel,

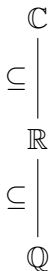
$\mathbb{Z}$  – množina všech celých čísel,

$\mathbb{Q}$  – množina všech racionálních čísel,

$\mathbb{R}$  – množina všech reálných čísel,

$\mathbb{C}$  – množina všech komplexních čísel.

Nulu považujeme za přirozené číslo, tj.  $0 \in \mathbb{N}$ .



# Základní pojmy

$\mathbb{N}$  – množina všech přirozených čísel,

$\mathbb{Z}$  – množina všech celých čísel,

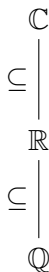
$\mathbb{Q}$  – množina všech racionálních čísel,

$\mathbb{R}$  – množina všech reálných čísel,

$\mathbb{C}$  – množina všech komplexních čísel.

Nulu považujeme za přirozené číslo, tj.  $0 \in \mathbb{N}$ .

*Imaginární jednotku* (která je prvkem  $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ ) budeme značit  $i$ .



# Základní pojmy

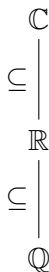
$\mathbb{N}$  – množina všech přirozených čísel,

$\mathbb{Z}$  – množina všech celých čísel,

$\mathbb{Q}$  – množina všech racionálních čísel,

$\mathbb{R}$  – množina všech reálných čísel,

$\mathbb{C}$  – množina všech komplexních čísel.



Nulu považujeme za přirozené číslo, tj.  $0 \in \mathbb{N}$ .

*Imaginární jednotku* (která je prvkem  $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ ) budeme značit  $i$ .

Prvky výše uvedených číselných oborů  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  nazýváme často *skaláry*. V tomto případě pak budeme mluvit o *číselném tělese*.

# Struktura číselných oborů I

Na každé z množin  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  jsou definované dvě binární operace, *sčítání*  $+$  a *násobení*  $\cdot$ .

# Struktura číselných oborů I

Na každé z množin  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  jsou definované dvě binární operace, *sčítání*  $+$  a *násobení*  $\cdot$ .

Obě tyto operace jsou asociativní a komutativní.

# Struktura číselných oborů I

Na každé z množin  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  jsou definované dvě binární operace, *sčítání*  $+$  a *násobení*  $\cdot$ .

Obě tyto operace jsou asociativní a komutativní.

Násobení je (z obou stran) *distributivní* vzhledem ke sčítání, tj. pro všechny prvky  $x, y, z$  příslušné množiny platí

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

# Struktura číselných oborů I

Na každé z množin  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  jsou definované dvě binární operace, *sčítání*  $+$  a *násobení*  $\cdot$ .

Obě tyto operace jsou asociativní a komutativní.

Násobení je (z obou stran) *distributivní* vzhledem ke sčítání, tj. pro všechny prvky  $x, y, z$  příslušné množiny platí

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Číselný obor  $\mathbb{N}$  je v porovnání s obory  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$  "chudší" – totiž rovnice tvaru  $x + a = b$  mají v oborech  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  řešení  $x = b - a$  pro libovolné  $a, b$ , ale v  $\mathbb{N}$  je takováto rovnice řešitelná, pokud  $a \leq b$ .



# Struktura číselných oborů I

Na každé z množin  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  jsou definované dvě binární operace, *sčítání*  $+$  a *násobení*  $\cdot$ .

Obě tyto operace jsou asociativní a komutativní.

Násobení je (z obou stran) *distributivní* vzhledem ke sčítání, tj. pro všechny prvky  $x, y, z$  příslušné množiny platí

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Číselný obor  $\mathbb{N}$  je v porovnání s obory  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$  "chudší" – totiž rovnice tvaru  $x + a = b$  mají v oborech  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  řešení  $x = b - a$  pro libovolné  $a, b$ , ale v  $\mathbb{N}$  je takováto rovnice řešitelná, pokud  $a \leq b$ .

Obory  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$  jsou však "bohatší" nejen v porovnání s  $\mathbb{N}$ , ale i s  $\mathbb{Z}$  – rovnice tvaru  $ax = b$  mají v oborech  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  řešení pro libovolné  $a \neq 0$  a  $b$ , přičemž v  $\mathbb{N}$  či  $\mathbb{Z}$  jsou řešitelné, pouze pokud  $a$  je dělitelem  $b$ .

# Axiomy tělesa I

**Tělesem** nazýváme množinu  $K$  s dvěma význačnými prvky – **nulou**  $0$  a **jedničkou**  $1$  – a dvěma binárními operacemi na  $K$  – **sčítáním**  $+$  a **násobením**  $\cdot$  – takovými, že platí

$$(\forall a, b \in K)(a + b = b + a), (\forall a, b \in K)(a \cdot b = b \cdot a),$$

# Axiomy tělesa I

**Tělesem** nazýváme množinu  $K$  s dvěma význačnými prvky – **nulou**  $0$  a **jedničkou**  $1$  – a dvěma binárními operacemi na  $K$  – **sčítáním**  $+$  a **násobením**  $\cdot$  – takovými, že platí

$$(\forall a, b \in K)(a + b = b + a), (\forall a, b \in K)(a \cdot b = b \cdot a),$$

$$(\forall a, b, c \in K)(a + (b + c) = (a + b) + c),$$

$$(\forall a, b, c \in K)(a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c),$$

# Axiomy tělesa I

**Tělesem** nazýváme množinu  $K$  s dvěma význačnými prvky – **nulou**  $0$  a **jedničkou**  $1$  – a dvěma binárními operacemi na  $K$  – **sčítáním**  $+$  a **násobením**  $\cdot$  – takovými, že platí

$$(\forall a, b \in K)(a + b = b + a), \quad (\forall a, b \in K)(a \cdot b = b \cdot a),$$

$$(\forall a, b, c \in K)(a + (b + c) = (a + b) + c),$$

$$(\forall a, b, c \in K)(a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c),$$

$$(\forall a \in K)(0 + a = a), \quad (\forall a \in K)(1 \cdot a = a),$$

# Axiomy tělesa I

**Tělesem** nazýváme množinu  $K$  s dvěma význačnými prvky – **nulou**  $0$  a **jedničkou**  $1$  – a dvěma binárními operacemi na  $K$  – **sčítáním**  $+$  a **násobením**  $\cdot$  – takovými, že platí

$$(\forall a, b \in K)(a + b = b + a), \quad (\forall a, b \in K)(a \cdot b = b \cdot a),$$

$$(\forall a, b, c \in K)(a + (b + c) = (a + b) + c),$$

$$(\forall a, b, c \in K)(a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c),$$

$$(\forall a \in K)(0 + a = a), \quad (\forall a \in K)(1 \cdot a = a),$$

$$(\forall a \in K)(\exists b \in K)(a + b = 0),$$

$$(\forall a \in K \setminus \{0\})(\exists b \in K)(a \cdot b = 1),$$

# Axiomy tělesa I

**Tělesem** nazýváme množinu  $K$  s dvěma význačnými prvky – **nulou**  $0$  a **jedničkou**  $1$  – a dvěma binárními operacemi na  $K$  – **sčítáním**  $+$  a **násobením**  $\cdot$  – takovými, že platí

$$(\forall a, b \in K)(a + b = b + a), (\forall a, b \in K)(a \cdot b = b \cdot a),$$

$$(\forall a, b, c \in K)(a + (b + c) = (a + b) + c),$$

$$(\forall a, b, c \in K)(a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c),$$

$$(\forall a \in K)(0 + a = a), \quad (\forall a \in K)(1 \cdot a = a),$$

$$(\forall a \in K)(\exists b \in K)(a + b = 0),$$

$$(\forall a \in K \setminus \{0\})(\exists b \in K)(a \cdot b = 1),$$

$$(\forall a, b, c \in K)(a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)), \quad 0 \neq 1.$$

# Axiomy tělesa II

Sčítání a násobení v tělese jsou komutativní a asociativní operace a násobení je distributivní vzhledem ke sčítání.

# Axiomy tělesa II

Sčítání a násobení v tělese jsou komutativní a asociativní operace a násobení je distributivní vzhledem ke sčítání.

0 je neutrální prvek sčítání a 1 je neutrální prvek násobení a tyto prvky jsou navzájem různé.



# Axiomy tělesa II

Sčítání a násobení v tělese jsou komutativní a asociativní operace a násobení je distributivní vzhledem ke sčítání.

0 je neutrální prvek sčítání a 1 je neutrální prvek násobení a tyto prvky jsou navzájem různé.

Prvek  $b \in K$  takový, že  $a + b = 0$ , je k danému  $a \in K$  určený jednoznačně.

Tento jednoznačně určený prvek k danému  $a$  označujeme  $-a$  a nazýváme **opačný prvek** k  $a$ . Místo  $a + (-b)$  píšeme jen  $a - b$ .

## Axiomy tělesa II

Sčítání a násobení v tělese jsou komutativní a asociativní operace a násobení je distributivní vzhledem ke sčítání.

0 je neutrální prvek sčítání a 1 je neutrální prvek násobení a tyto prvky jsou navzájem různé.

Prvek  $b \in K$  takový, že  $a + b = 0$ , je k danému  $a \in K$  určený jednoznačně.

Tento jednoznačně určený prvek k danému  $a$  označujeme  $-a$  a nazýváme **opačný prvek** k  $a$ . Místo  $a + (-b)$  píšeme jen  $a - b$ .

Analogicky se lze přesvědčit, že i prvek  $b \in K$  takový, že  $a \cdot b = 1$  je k danému  $0 \neq a \in K$  určený jednoznačně – označujeme ho  $a^{-1}$  nebo  $\frac{1}{a}$ , případně  $1/a$  a nazýváme **inverzní prvek** k  $a$  nebo **převrácená hodnota** prvku  $a$ .

## Axiomy tělesa II

Sčítání a násobení v tělese jsou komutativní a asociativní operace a násobení je distributivní vzhledem ke sčítání.

0 je neutrální prvek sčítání a 1 je neutrální prvek násobení a tyto prvky jsou navzájem různé.

Prvek  $b \in K$  takový, že  $a + b = 0$ , je k danému  $a \in K$  určený jednoznačně.

Tento jednoznačně určený prvek k danému  $a$  označujeme  $-a$  a nazýváme **opačný prvek** k  $a$ . Místo  $a + (-b)$  píšeme jen  $a - b$ .

Analogicky se lze přesvědčit, že i prvek  $b \in K$  takový, že  $a \cdot b = 1$  je k danému  $0 \neq a \in K$  určený jednoznačně – označujeme ho  $a^{-1}$  nebo  $\frac{1}{a}$ , případně  $1/a$  a nazýváme **inverzní prvek** k  $a$  nebo **převrácená hodnota** prvku  $a$ .

Místo  $a \cdot b^{-1}$  píšeme též  $\frac{a}{b}$  nebo  $a/b$ .

# Vlastnosti těles I

## Tvrzení 2.1

*Bud'  $K$  těleso. Potom pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  a  $a, b, c, b_1, \dots, b_n \in K$  platí*

*(a)  $a + b = a + c \Rightarrow b = c,$*

# Vlastnosti těles I

## Tvrzení 2.1

*Bud'  $K$  těleso. Potom pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  a  $a, b, c, b_1, \dots, b_n \in K$  platí*

*(a)  $a + b = a + c \Rightarrow b = c,$*

*(b)  $(a \cdot b = a \cdot c \ \& \ a \neq 0) \Rightarrow b = c,$*

# Vlastnosti těles I

## Tvrzení 2.1

*Bud'  $K$  těleso. Potom pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  a  $a, b, c, b_1, \dots, b_n \in K$  platí*

(a)  $a + b = a + c \Rightarrow b = c,$

(b)  $(a \cdot b = a \cdot c \ \& \ a \neq 0) \Rightarrow b = c,$

(c)  $a \cdot 0 = 0,$

# Vlastnosti těles I

## Tvrzení 2.1

*Bud'  $K$  těleso. Potom pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  a  $a, b, c, b_1, \dots, b_n \in K$  platí*

(a)  $a + b = a + c \Rightarrow b = c,$

(b)  $(a \cdot b = a \cdot c \ \& \ a \neq 0) \Rightarrow b = c,$

(c)  $a \cdot 0 = 0,$

(d)  $a \cdot b = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0),$

# Vlastnosti těles I

## Tvrzení 2.1

*Bud'  $K$  těleso. Potom pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  a  $a, b, c, b_1, \dots, b_n \in K$  platí*

(a)  $a + b = a + c \Rightarrow b = c,$

(b)  $(a \cdot b = a \cdot c \ \& \ a \neq 0) \Rightarrow b = c,$

(c)  $a \cdot 0 = 0,$

(d)  $a \cdot b = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0),$

(e)  $-a = (-1) \cdot a,$



# Vlastnosti těles I

## Tvrzení 2.1

*Bud'  $K$  těleso. Potom pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  a  $a, b, c, b_1, \dots, b_n \in K$  platí*

(a)  $a + b = a + c \Rightarrow b = c,$

(b)  $(a \cdot b = a \cdot c \ \& \ a \neq 0) \Rightarrow b = c,$

(c)  $a \cdot 0 = 0,$

(d)  $a \cdot b = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0),$

(e)  $-a = (-1) \cdot a,$

(f)  $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c,$

# Vlastnosti těles I

## Tvrzení 2.1

*Bud'  $K$  těleso. Potom pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  a  $a, b, c, b_1, \dots, b_n \in K$  platí*

(a)  $a + b = a + c \Rightarrow b = c,$

(b)  $(a \cdot b = a \cdot c \ \& \ a \neq 0) \Rightarrow b = c,$

(c)  $a \cdot 0 = 0,$

(d)  $a \cdot b = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0),$

(e)  $-a = (-1) \cdot a,$

(f)  $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c,$

(g)  $a \cdot (b_1 + \dots + b_n) = a \cdot b_1 + \dots + a \cdot b_n.$

# Vlastnosti těles I

## Tvrzení 2.1

*Bud'  $K$  těleso. Potom pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  a  $a, b, c, b_1, \dots, b_n \in K$  platí*

(a)  $a + b = a + c \Rightarrow b = c,$

(b)  $(a \cdot b = a \cdot c \ \& \ a \neq 0) \Rightarrow b = c,$

(c)  $a \cdot 0 = 0,$

(d)  $a \cdot b = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0),$

(e)  $-a = (-1) \cdot a,$

(f)  $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c,$

(g)  $a \cdot (b_1 + \dots + b_n) = a \cdot b_1 + \dots + a \cdot b_n.$

Doplňme, že podmínky (a) a (b) sa nazývajú **zákony o krácení** pro sčítaní resp. násobení v tělese.

## Vlastnosti těles II

Podmínka (e) nám umožňuje zavést libovolné celočíselné násobky prvků z tělesa.

## Vlastnosti těles II

Podmínka (e) nám umožňuje zavést libovolné celočíselné násobky prvků z tělesa.

Pro  $a \in K$ ,  $n \in \mathbb{N}$  klademe  $(-n)a = -(na) = n(-a)$ .

## Vlastnosti těles II

Podmínka (e) nám umožňuje zavést libovolné celočíselné násobky prvků z tělesa.

Pro  $a \in K$ ,  $n \in \mathbb{N}$  klademe  $(-n)a = -(na) = n(-a)$ .

Podobně lze pro nenulové prvky tělesa zavést i libovolné celočíselné mocniny. Pro  $0 \neq a \in K$ ,  $n \in \mathbb{N}$  klademe  $a^{-n} = (a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$ .

## Vlastnosti těles II

Podmínka (e) nám umožňuje zavést libovolné celočíselné násobky prvků z tělesa.

Pro  $a \in K$ ,  $n \in \mathbb{N}$  klademe  $(-n)a = -(na) = n(-a)$ .

Podobně lze pro nenulové prvky tělesa zavést i libovolné celočíselné mocniny. Pro  $0 \neq a \in K$ ,  $n \in \mathbb{N}$  klademe  $a^{-n} = (a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$ .

$$0a = 0, \quad 1a = a, \quad a^0 = 1, \quad a^1 = a,$$

$$n(a + b) = na + nb, \quad (m + n)a = ma + na,$$

$$(mn)a = m(na), \quad (mn)(a \cdot b) = (ma) \cdot (nb),$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad n < 0 \Rightarrow a \neq 0 \neq b,$$

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \quad (m < 0 \vee n < 0) \Rightarrow a \neq 0,$$

$$a^{mn} = (a^m)^n, \quad (m < 0 \vee n < 0) \Rightarrow a \neq 0$$

$$\forall a, b \in K, m, n \in \mathbb{Z}.$$

# Vlastnosti těles III

Nechť  $K$  je těleso a  $L \subseteq K$ . Říkáme, že  $L$  je **podtěleso** tělesa  $K$ , pokud  $0, 1 \in L$  a pro všechna  $a, b \in L$  platí  $a + b \in L$ ,  $ab \in L$ ,  $-a \in L$  a, pokud  $a \neq 0$ , tak i  $a^{-1} \in L$ .



# Vlastnosti těles III

Nechť  $K$  je těleso a  $L \subseteq K$ . Říkáme, že  $L$  je **podtěleso** tělesa  $K$ , pokud  $0, 1 \in L$  a pro všechna  $a, b \in L$  platí  $a + b \in L$ ,  $ab \in L$ ,  $-a \in L$  a, pokud  $a \neq 0$ , tak i  $a^{-1} \in L$ .

Podtěleso tělesa  $K$  je tedy jeho podmnožina  $L$ , která obsahuje nulu a jedničku a je uzavřená vzhledem ke sčítání, násobení, opačnému a inverznímu prvku. Zřejmě každé podtěleso tělesa  $K$  je s těmito operacemi zúženými z  $K$  na  $L$  i samo tělesem. Říkáme pak, že těleso  $K$  je **rozšířením** tělesa  $L$ .

## Vlastnosti těles III

Nechť  $K$  je těleso a  $L \subseteq K$ . Říkáme, že  $L$  je **podtěleso** tělesa  $K$ , pokud  $0, 1 \in L$  a pro všechna  $a, b \in L$  platí  $a + b \in L$ ,  $ab \in L$ ,  $-a \in L$  a, pokud  $a \neq 0$ , tak i  $a^{-1} \in L$ .

Podtěleso tělesa  $K$  je tedy jeho podmnožina  $L$ , která obsahuje nulu a jedničku a je uzavřená vzhledem ke sčítání, násobení, opačnému a inverznímu prvku. Zřejmě každé podtěleso tělesa  $K$  je s těmito operacemi zúženými z  $K$  na  $L$  i samo tělesem. Říkáme pak, že těleso  $K$  je **rozšířením** tělesa  $L$ .

Zřejmě těleso  $\mathbb{Q}$  je podtělesem tělesa  $\mathbb{R}$  i tělesa  $\mathbb{C}$ ; těleso  $\mathbb{C}$  je rozšířením těles  $\mathbb{Q}$  a  $\mathbb{R}$ .

# Vlastnosti těles IV

**Charakteristikou tělesa  $K$** , píšeme  $\text{char}K$ , nazýváme nejmenší kladné celé číslo  $n$  takové, že  $n1 = 0$ ; pokud takové  $n$  neexistuje, t. j.  $n1 \neq 0$  pro každé celé  $n > 0$ , říkáme že  $K$  má charakteristiku  $\infty$  (někteří autoři definují  $\text{char}K = 0$ ).

# Vlastnosti těles IV

**Charakteristikou tělesa  $K$** , píšeme  $\text{char}K$ , nazýváme nejmenší kladné celé číslo  $n$  takové, že  $n1 = 0$ ; pokud takové  $n$  neexistuje, t. j.  $n1 \neq 0$  pro každé celé  $n > 0$ , říkáme že  $K$  má charakteristiku  $\infty$  (někteří autoři definují  $\text{char}K = 0$ ).

Je-li těleso  $K$  rozšířením tělesa  $L$ , tak obě tělesa  $K$  a  $L$  mají tutéž jedničku i nulu, a proto  $\text{char}K = \text{char}L$ .

# Vlastnosti těles IV

**Charakteristikou tělesa  $K$** , píšeme  $\text{char}K$ , nazýváme nejmenší kladné celé číslo  $n$  takové, že  $n1 = 0$ ; pokud takové  $n$  neexistuje, t. j.  $n1 \neq 0$  pro každé celé  $n > 0$ , říkáme že  $K$  má charakteristiku  $\infty$  (někteří autoři definují  $\text{char}K = 0$ ).

Je-li těleso  $K$  rozšířením tělesa  $L$ , tak obě tělesa  $K$  a  $L$  mají tutéž jedničku i nulu, a proto  $\text{char}K = \text{char}L$ .

Zřejmě  $\text{char}\mathbb{Q} = \text{char}\mathbb{R} = \text{char}\mathbb{C} = \infty$ .

## Věta 2.2

*Nechť  $K$  je těleso. Potom  $\text{char}K$  je rovna  $\infty$  nebo prvočíslu.*

# Konečná tělesa I

V tomto odstavci si ukážeme příklady těles, jejichž charakteristika není  $\infty$ . Z tohoto důvodu se tato tělesa podstatně liší od nám známých číselných těles.

# Konečná tělesa I

V tomto odstavci si ukážeme příklady těles, jejichž charakteristika není  $\infty$ . Z tohoto důvodu se tato tělesa podstatně liší od nám známých číselných těles.

Totíž, pro každé prvočíslo  $p$  sestrojíme jisté konečné těleso  $\mathbb{Z}_p$ , které má  $p$  prvků a charakteristiku  $p$ . Naopak, dříve uvedená číselná tělesa jsou nekonečná.

# Konečná tělesa I

V tomto odstavci si ukážeme příklady těles, jejichž charakteristika není  $\infty$ . Z tohoto důvodu se tato tělesa podstatně liší od nám známých číselných těles.

Totíž, pro každé prvočíslo  $p$  sestrojíme jisté konečné těleso  $\mathbb{Z}_p$ , které má  $p$  prvků a charakteristiku  $p$ . Naopak, dříve uvedená číselná tělesa jsou nekonečná.

Pro potřeby matematické analýzy, tedy i z hlediska fyzikálních aplikací, jsou nejdůležitějšími tělesy  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$ . Konečná tělesa však v současnosti sehrávají důležitou úlohu např. v teorii kódování a kryptografii.



# Konečná tělesa II

Pro každé kladné celé číslo  $n$  označme

$$\mathbb{Z}_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k < n\} = \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

# Konečná tělesa II

Pro každé kladné celé číslo  $n$  označme

$$\mathbb{Z}_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k < n\} = \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Množinu  $\mathbb{Z}_n$  nazýváme **množinou zbytkových tříd modulo  $n$** .  
Na této množině zavedeme dvě binární operace – sčítání  $\oplus$  a násobení  $\odot$  (je nutné odlišit sčítání a násobení v  $\mathbb{Z}_n$  od příslušných operací  $+$  a  $\cdot$  v  $\mathbb{Z}$ ).

# Konečná tělesa II

Pro každé kladné celé číslo  $n$  označme

$$\mathbb{Z}_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k < n\} = \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Množinu  $\mathbb{Z}_n$  nazýváme **množinou zbytkových tříd modulo  $n$** .  
Na této množině zavedeme dvě binární operace – sčítání  $\oplus$  a násobení  $\odot$  (je nutné odlišit sčítání a násobení v  $\mathbb{Z}_n$  od příslušných operací  $+$  a  $\cdot$  v  $\mathbb{Z}$ ).

Pro  $a, b \in \mathbb{Z}_n$  klademe

$a \oplus b$  = zbytek po dělení  $a + b$  číslem  $n$ ,

$a \odot b$  = zbytek po dělení  $a \cdot b$  číslem  $n$ .

# Konečná tělesa III

$\oplus$  a  $\odot$  jsou asociativní a komutativní operace na  $\mathbb{Z}_n$ , 0 je neutrální prvek sčítání a, pro  $n > 1$ , 1 je neutrální prvek násobení.

# Konečná tělesa III

$\oplus$  a  $\odot$  jsou asociativní a komutativní operace na  $\mathbb{Z}_n$ , 0 je neutrální prvek sčítání a, pro  $n > 1$ , 1 je neutrální prvek násobení.

Násobení je distributivní vzhledem ke sčítání a dále  $\ominus a = n - a$  je opačný prvek k  $a \in \mathbb{Z}_n$ .

# Konečná tělesa III

$\oplus$  a  $\odot$  jsou asociativní a komutativní operace na  $\mathbb{Z}_n$ , 0 je neutrální prvek sčítání a, pro  $n > 1$ , 1 je neutrální prvek násobení.

Násobení je distributivní vzhledem ke sčítání a dále  $\ominus a = n - a$  je opačný prvek k  $a \in \mathbb{Z}_n$ .

## Věta 2.3

*Množina  $\mathbb{Z}_n$  s operacemi  $\oplus$  a  $\odot$  je těleso právě tehdy, když  $n$  je prvočíslo.*

# Konečná tělesa IV

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Multiplikační tabulky sčítání a násobení v tělese  $\mathbb{Z}_5$ .

# Obsah

- 1 Motivace
- 2 Tělesa a základní číselné obory  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$
- 3 Vektorové prostory
  - Vektorové prostory
  - Příklady vektorových prostorů
- 4 Matice nad vektorovým prostorem
- 5 Lineární zobrazení



# Vektorové prostory I

Bud'  $K$  (číselné) těleso. **Vektorovým** nebo též **lineárním prostorem** nad  $K$  nazýváme množinu  $V$  s význačným prvkem  $0$  a dvěma binárními operacemi – **scítáním**  $+$  :  $V \times V \rightarrow V$  a

# Vektorové prostory I

Bud'  $K$  (číselné) těleso. **Vektorovým** nebo též **lineárním prostorem** nad  $K$  nazýváme množinu  $V$  s význačným prvkem  $0$  a dvěma binárními operacemi – **scítáním**  $+$  :  $V \times V \rightarrow V$  a **násobením**  $\cdot$  :  $K \times V \rightarrow V$  – takovými, že platí

# Vektorové prostory I

Bud'  $K$  (číselné) těleso. **Vektorovým** nebo též **lineárním prostorem** nad  $K$  nazýváme množinu  $V$  s význačným prvkem  $\mathbf{0}$  a dvěma binárními operacemi – **sčítáním**  $+$  :  $V \times V \rightarrow V$  a **násobením**  $\cdot$  :  $K \times V \rightarrow V$  – takovými, že platí

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V)(\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}),$$

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}),$$

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}),$$

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\exists \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}),$$

# Vektorové prostory I

Bud'  $K$  (číselné) těleso. **Vektorovým** nebo též **lineárním prostorem** nad  $K$  nazýváme množinu  $V$  s význačným prvkem  $\mathbf{0}$  a dvěma binárními operacemi – **sčítáním**  $+$  :  $V \times V \rightarrow V$  a **násobením**  $\cdot$  :  $K \times V \rightarrow V$  – takovými, že platí

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V)(\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}),$$

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}),$$

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}),$$

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\exists \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}),$$

$$(\forall a, b \in K)(\forall \mathbf{x} \in V)(a \cdot (b \cdot \mathbf{x}) = (ab) \cdot \mathbf{x}),$$

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}),$$

# Vektorové prostory I

Bud'  $K$  (číselné) těleso. **Vektorovým** nebo též **lineárním prostorem** nad  $K$  nazýváme množinu  $V$  s význačným prvkem  $\mathbf{0}$  a dvěma binárními operacemi – **sčítáním**  $+$  :  $V \times V \rightarrow V$  a **násobením**  $\cdot$  :  $K \times V \rightarrow V$  – takovými, že platí

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V)(\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}),$$

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}),$$

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}),$$

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\exists \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}),$$

$$(\forall a, b \in K)(\forall \mathbf{x} \in V)(a \cdot (b \cdot \mathbf{x}) = (ab) \cdot \mathbf{x}),$$

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}),$$

$$(\forall a \in K)(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(a \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (a \cdot \mathbf{x}) + (a \cdot \mathbf{y})),$$

$$(\forall a, b \in K)(\forall \mathbf{x} \in V)((a + b) \cdot \mathbf{x} = (a \cdot \mathbf{x}) + (b \cdot \mathbf{x})).$$

# Vektorové prostory II

Skaláry značíme "obyčejnými" malými latinskými písmeny a vektory tučnými malými latinskými písmeny.

# Vektorové prostory II

Skaláry značíme "obyčejnými" malými latinskými písmeny a vektory tučnými malými latinskými písmeny.

Poznámka. I když sčítání skalárů v (číselném) tělese  $K$  a sčítání vektorů značíme stejným znakem  $+$ , jde o různé operace.

# Vektorové prostory II

Skaláry značíme "obyčejnými" malými latinskými písmeny a vektory tučnými malými latinskými písmeny.

Poznámka. I když sčítání skalárů v (číselném) tělese  $K$  a sčítání vektorů značíme stejným znakem  $+$ , jde o různé operace.

Podobně násobení v (číselném) tělese a násobení vektoru skalárem jsou různé operace, ačkoliv obě značíme  $\cdot$ .



# Vektorové prostory II

Skaláry značíme "obyčejnými" malými latinskými písmeny a vektory tučnými malými latinskými písmeny.

Poznámka. I když sčítání skalárů v (číselném) tělese  $K$  a sčítání vektorů značíme stejným znakem  $+$ , jde o různé operace.

Podobně násobení v (číselném) tělese a násobení vektoru skalárem jsou různé operace, ačkoliv obě značíme  $\cdot$ .

Později budeme stejně značit příslušné operace a nuly v různých vektorových prostorech.

# Vektorové prostory III

Z formálního hlediska připomínají axiomy vektorového prostoru vlastnosti (číselného) tělesa  $K$ :

# Vektorové prostory III

Z formálního hlediska připomínají axiomy vektorového prostoru vlastnosti (číselného) tělesa  $K$ :

sčítání vektorů je opět asociativní a komutativní binární operace na  $V$  s neutrálním prvkem  $\mathbf{0} \in V$ ,

# Vektorové prostory III

Z formálního hlediska připomínají axiomy vektorového prostoru vlastnosti (číselného) tělesa  $K$ :

sčítání vektorů je opět asociativní a komutativní binární operace na  $V$  s neutrálním prvkem  $\mathbf{0} \in V$ ,

operace násobení vektoru skalárem splňuje jakousi podmínku "asociativity",  $1 \in K$  je její "neutrální prvek"

# Vektorové prostory III

Z formálního hlediska připomínají axiomy vektorového prostoru vlastnosti (číselného) tělesa  $K$ :

sčítání vektorů je opět asociativní a komutativní binární operace na  $V$  s neutrálním prvkem  $\mathbf{0} \in V$ ,

operace násobení vektoru skalárem splňuje jakousi podmínku "asociativity",  $1 \in K$  je její "neutrální prvek"

a platí dva "distributivní zákony".

# Vektorové prostory III

Z formálního hlediska připomínají axiomy vektorového prostoru vlastnosti (číselného) tělesa  $K$ :

sčítání vektorů je opět asociativní a komutativní binární operace na  $V$  s neutrálním prvkem  $\mathbf{0} \in V$ ,

operace násobení vektoru skalárem splňuje jakousi podmínku "asociativity",  $1 \in K$  je její "neutrální prvek"

a platí dva "distributivní zákony".

**Jeden podstatný rozdíl** – násobení v (číselném) tělese  $K$  je binární operací na množině  $K$ , t. j. zobrazením  $\cdot : K \times K \rightarrow K$ , násobení ve vektorovém prostoru  $V$  nad číselným tělesem  $K$  není binární operace na  $V$ , ale binární operace  $\cdot : K \times V \rightarrow V$ .

# Vektorové prostory IV

To nám však nebrání zavést obdobné dohody jako pro operace v (číselném) tělese: násobení má přednost před sčítáním a znak násobení budeme většinou vynechávat, t. j. budeme např. psát  $a\mathbf{x} + \mathbf{y}$  namísto  $(a \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{y}$ .

# Vektorové prostory IV

To nám však nebrání zavést obdobné dohody jako pro operace v (číselném) tělese: násobení má přednost před sčítáním a znak násobení budeme většinou vynechávat, t. j. budeme např. psát  $a\mathbf{x} + \mathbf{y}$  namísto  $(a \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{y}$ .

Rovněž budeme vynechávat závorky, jejichž umístění neovlivní výslednou hodnotu výrazů jako např. v  $ab\mathbf{x}$  nebo  $a_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_n\mathbf{x}_n$ .



# Vektorové prostory IV

To nám však nebrání zavést obdobné dohody jako pro operace v (číselném) tělese: násobení má přednost před sčítáním a znak násobení budeme většinou vynechávat, t. j. budeme např. psát  $a\mathbf{x} + \mathbf{y}$  namísto  $(a \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{y}$ .

Rovněž budeme vynechávat závorky, jejichž umístění neovlivní výslednou hodnotu výrazů jako např. v  $ab\mathbf{x}$  nebo  $a_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_n\mathbf{x}_n$ .

Poslední výraz budeme taktéž značit

$$\sum_{i=1}^n a_i\mathbf{x}_i$$

a nazývat **lineární kombinací** vektorů  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  s koeficienty  $a_1, \dots, a_n$ .

# Vektorové prostory IV

To nám však nebrání zavést obdobné dohody jako pro operace v (číselném) tělese: násobení má přednost před sčítáním a znak násobení budeme většinou vynechávat, t. j. budeme např. psát  $a\mathbf{x} + \mathbf{y}$  namísto  $(a \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{y}$ .

Rovněž budeme vynechávat závorky, jejichž umístění neovlivní výslednou hodnotu výrazů jako např. v  $ab\mathbf{x}$  nebo  $a_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_n\mathbf{x}_n$ .

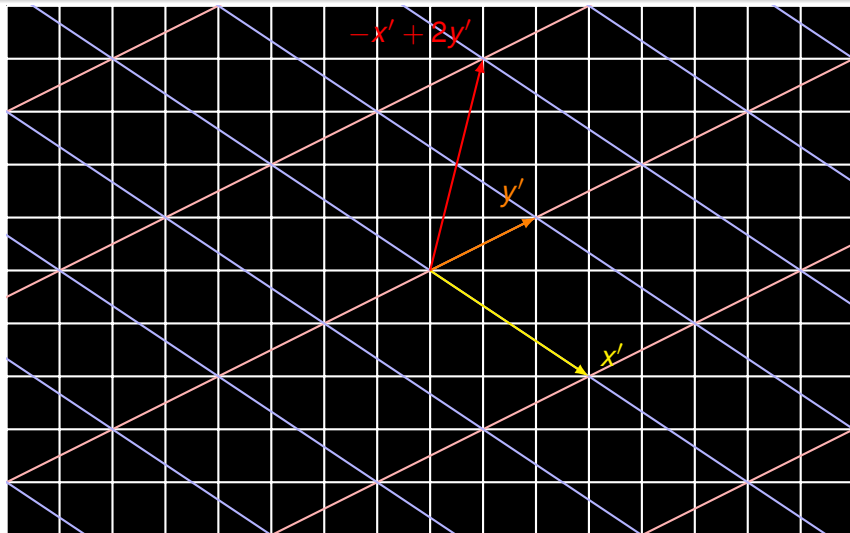
Poslední výraz budeme taktéž značit

$$\sum_{i=1}^n a_i\mathbf{x}_i$$

a nazývat **lineární kombinací** vektorů  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  s koeficienty  $a_1, \dots, a_n$ .

Speciálně pro  $n = 1$  to znamená  $\sum_{i=1}^1 a_i\mathbf{x}_i = a_1\mathbf{x}_1$ ; kvůli úplnosti pro  $n = 0$  ještě klademe prázdnou lineární kombinaci  $\sum_{i=1}^0 a_i\mathbf{x}_i$  rovnou  $\mathbf{0}$ .

# Vektorové prostory V



# Vektorové prostory VI

## Tvrzení 3.1

*Nechť  $V$  je vektorový prostor nad (číselným) tělesem  $K$ . Pak pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b, a_1, \dots, a_n \in K$  a  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in V$  platí*

$$(a) \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{z},$$

# Vektorové prostory VI

## Tvrzení 3.1

*Nechť  $V$  je vektorový prostor nad (číselným) tělesem  $K$ . Pak pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b, a_1, \dots, a_n \in K$  a  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in V$  platí*

$$(a) \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{z},$$

$$(b) \quad (a\mathbf{x} = a\mathbf{y} \ \& \ a \neq 0) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y},$$

$$(a\mathbf{x} = b\mathbf{x} \ \& \ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \Rightarrow a = b,$$

# Vektorové prostory VI

## Tvrzení 3.1

*Nechť  $V$  je vektorový prostor nad (číselným) tělesem  $K$ . Pak pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b, a_1, \dots, a_n \in K$  a  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in V$  platí*

(a)  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{z},$

(b)  $(a\mathbf{x} = a\mathbf{y} \ \& \ a \neq 0) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y},$

$(a\mathbf{x} = b\mathbf{x} \ \& \ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \Rightarrow a = b,$

(c)  $a\mathbf{0} = \mathbf{0} = 0\mathbf{x},$

# Vektorové prostory VI

## Tvrzení 3.1

*Nechť  $V$  je vektorový prostor nad (číselným) tělesem  $K$ . Pak pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b, a_1, \dots, a_n \in K$  a  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in V$  platí*

$$(a) \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{z},$$

$$(b) \quad (a\mathbf{x} = a\mathbf{y} \ \& \ a \neq 0) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y},$$

$$(a\mathbf{x} = b\mathbf{x} \ \& \ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \Rightarrow a = b,$$

$$(c) \quad a\mathbf{0} = \mathbf{0} = 0\mathbf{x},$$

$$(d) \quad a\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow (a = 0 \vee \mathbf{x} = \mathbf{0}),$$

# Vektorové prostory VI

## Tvrzení 3.1

*Nechť  $V$  je vektorový prostor nad (číselným) tělesem  $K$ . Pak pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b, a_1, \dots, a_n \in K$  a  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in V$  platí*

(a)  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{z},$

(b)  $(a\mathbf{x} = a\mathbf{y} \ \& \ a \neq 0) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y},$

$(a\mathbf{x} = b\mathbf{x} \ \& \ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \Rightarrow a = b,$

(c)  $a\mathbf{0} = \mathbf{0} = 0\mathbf{x},$

(d)  $a\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow (a = 0 \vee \mathbf{x} = \mathbf{0}),$

(e)  $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x},$



# Vektorové prostory VI

## Tvrzení 3.1

*Nechť  $V$  je vektorový prostor nad (číselným) tělesem  $K$ . Pak pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b, a_1, \dots, a_n \in K$  a  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in V$  platí*

(a)  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{z},$

(b)  $(a\mathbf{x} = a\mathbf{y} \ \& \ a \neq 0) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y},$

$(a\mathbf{x} = b\mathbf{x} \ \& \ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \Rightarrow a = b,$

(c)  $a\mathbf{0} = \mathbf{0} = 0\mathbf{x},$

(d)  $a\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow (a = 0 \vee \mathbf{x} = \mathbf{0}),$

(e)  $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x},$

(f)  $a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = a\mathbf{x} - a\mathbf{y}, (a - b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} - b\mathbf{x},$

# Vektorové prostory VI

## Tvrzení 3.1

*Nechť  $V$  je vektorový prostor nad (číselným) tělesem  $K$ . Pak pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b, a_1, \dots, a_n \in K$  a  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in V$  platí*

(a)  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{z},$

(b)  $(a\mathbf{x} = a\mathbf{y} \ \& \ a \neq 0) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y},$

$(a\mathbf{x} = b\mathbf{x} \ \& \ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \Rightarrow a = b,$

(c)  $a\mathbf{0} = \mathbf{0} = 0\mathbf{x},$

(d)  $a\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow (a = 0 \vee \mathbf{x} = \mathbf{0}),$

(e)  $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x},$

(f)  $a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = a\mathbf{x} - a\mathbf{y}, (a - b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} - b\mathbf{x},$

(g)  $a(\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_n) = a\mathbf{x}_1 + \dots + a\mathbf{x}_n,$

$(a_1 + \dots + a_n)\mathbf{x} = a_1\mathbf{x} + \dots + a_n\mathbf{x}.$

# Příklady I - Rozšíření těles

Zřejmě každé těleso  $K$  můžeme považovat za vektorový prostor nad sebou samým.

# Příklady I - Rozšíření těles

Zřejmě každé těleso  $K$  můžeme považovat za vektorový prostor nad sebou samým.

Obecněji, pokud těleso  $L$  je rozšířením tělesa  $K$ , tak  $L$  můžeme považovat za vektorový prostor nad tělesem  $K$  (formálně stačí "zapomenout" na násobení některých dvojic prvků  $a, b \in L$  a součin  $ab$  připustit jen pro  $a \in K, b \in L$ ).

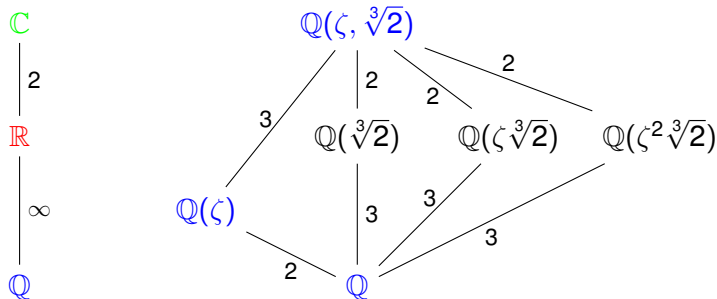
# Příklady I - Rozšíření těles

Zřejmě každé těleso  $K$  můžeme považovat za vektorový prostor nad sebou samým.

Obecněji, pokud těleso  $L$  je rozšířením tělesa  $K$ , tak  $L$  můžeme považovat za vektorový prostor nad tělesem  $K$  (formálně stačí "zapomenout" na násobení některých dvojic prvků  $a, b \in L$  a součin  $ab$  připustit jen pro  $a \in K, b \in L$ ).

Podobným způsobem můžeme vektorový prostor  $V$  nad tělesem  $L$  zúžením násobení  $L \times V \rightarrow V$  na násobení  $K \times V \rightarrow V$  změnit na vektorový prostor nad tělesem  $K$ .

## Příklady I - Rozšíření těles



# Příklady II - $n$ -rozměrné řádkové a sloupcové vektory nad daným tělesem

Pro libovolné těleso  $K$  a  $n \in \mathbb{N}$  je množina

$$K^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in K\}$$

všech uspořádaných  $n$ -tic prvků z  $K$  spolu s operacemi

# Příklady II - $n$ -rozměrné řádkové a sloupcové vektory nad daným tělesem

Pro libovolné těleso  $K$  a  $n \in \mathbb{N}$  je množina

$$K^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in K\}$$

všech uspořádaných  $n$ -tic prvků z  $K$  spolu s operacemi

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$



# Příklady II - $n$ -rozměrné řádkové a sloupcové vektory nad daným tělesem

Pro libovolné těleso  $K$  a  $n \in \mathbb{N}$  je množina

$$K^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in K\}$$

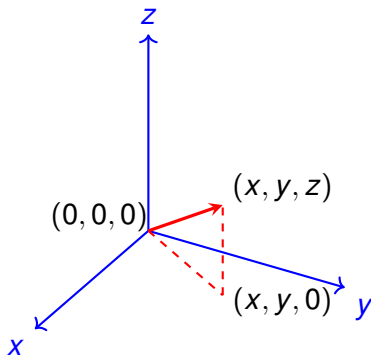
všech uspořádaných  $n$ -tic prvků z  $K$  spolu s operacemi

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$c\mathbf{x} = c(x_1, \dots, x_n) = (cx_1, \dots, cx_n),$$

kde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in K^n$  a  $c \in K$ ,  
vektorový prostor nad tělesem  $K$ .

# Příklady II - $n$ -rozměrné řádkové a sloupcové vektory nad daným tělesem



# Příklady II - $n$ -rozměrné řádkové a sloupcové vektory nad daným tělesem

Zřejmě uspořádaná  $n$ -tice  $\mathbf{0}_n = (0, \dots, 0)$  hraje úlohu nuly v  $K^n$ . Pokud bude potřebné rozlišit nulové vektory v prostorech  $K^n$  pro různá přirozená čísla  $n$ , budeme pro nulu v  $K^n$  používat označení  $\mathbf{0}_n$ . Opačný prvek k  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$  je zřejmě

$$-\mathbf{x} = -(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_n).$$

## Příklady II - $n$ -rozměrné řádkové a sloupcové vektory nad daným tělesem

Zřejmě uspořádaná  $n$ -tice  $\mathbf{0}_n = (0, \dots, 0)$  hraje úlohu nuly v  $K^n$ . Pokud bude potřebné rozlišit nulové vektory v prostorech  $K^n$  pro různá přirozená čísla  $n$ , budeme pro nulu v  $K^n$  používat označení  $\mathbf{0}_n$ . Opačný prvek k  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$  je zřejmě

$$-\mathbf{x} = -(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_n).$$

Říkáme, že operace na  $K^n$  jsou definované **po složkách**. Prvky tohoto vektorového prostoru nazýváme  **$n$ -rozměrné řádkové vektory** nad tělesem  $K$ .

# Příklady II - $n$ -rozměrné řádkové a sloupcové vektory nad daným tělesem

Zřejmě uspořádaná  $n$ -tice  $\mathbf{0}_n = (0, \dots, 0)$  hraje úlohu nuly v  $K^n$ . Pokud bude potřebné rozlišit nulové vektory v prostorech  $K^n$  pro různá přirozená čísla  $n$ , budeme pro nulu v  $K^n$  používat označení  $\mathbf{0}_n$ . Opačný prvek k  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$  je zřejmě

$$-\mathbf{x} = -(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_n).$$

Říkáme, že operace na  $K^n$  jsou definované **po složkách**. Prvky tohoto vektorového prostoru nazýváme  **$n$ -rozměrné řádkové vektory** nad tělesem  $K$ .

Vektorový prostor  $K^0$  sestává z jediného prvku  $\emptyset$ , představujícího "uspořádanou nultici", která je nutně nulou v  $K^0$ .

# Příklady II - $n$ -rozměrné řádkové a sloupcové vektory nad daným tělesem

Někdy bude výhodnější pracovat s  *$n$ -rozměrnými sloupcovými vektory* nad tělesem  $K$ , t. j. s vektory tvaru

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ kde } x_1, \dots, x_n \in K.$$

Píšeme rovněž  $K^n$ .

## Příklady III - Polynomy nad daným tělesem

**Polynomem** nebo též **mnohočlenem**  $f$  stupně  $n$ , kde  $-1 \leq n \in \mathbb{Z}$ , v proměnné  $x$  nad tělesem  $K$  rozumíme formální výraz tvaru

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \\ &= \sum_{i=0}^n a_i x^i, \end{aligned}$$

kde  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in K$  jsou skaláry, nazývané *koeficienty* polynomu  $f$ , a  $a_n \neq 0$ .

## Příklady III - Polynomy nad daným tělesem

**Polynomem** nebo též **mnohočlenem**  $f$  stupně  $n$ , kde  $-1 \leq n \in \mathbb{Z}$ , v proměnné  $x$  nad tělesem  $K$  rozumíme formální výraz tvaru

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \\ &= \sum_{i=0}^n a_i x^i, \end{aligned}$$

kde  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in K$  jsou skaláry, nazývané *koeficienty* polynomu  $f$ , a  $a_n \neq 0$ .

Nulu  $0 \in K$  považujeme za polynom stupně  $-1$  a nenulové skaláry  $a \in K$  za polynomy stupně  $0$ .



## Příklady III - Polynomy nad daným tělesem

**Polynomem** nebo též **mnohočlenem**  $f$  stupně  $n$ , kde  $-1 \leq n \in \mathbb{Z}$ , v proměnné  $x$  nad tělesem  $K$  rozumíme formální výraz tvaru

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \\ &= \sum_{i=0}^n a_i x^i, \end{aligned}$$

kde  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in K$  jsou skaláry, nazývané *koeficienty* polynomu  $f$ , a  $a_n \neq 0$ .

Nulu  $0 \in K$  považujeme za polynom stupně  $-1$  a nenulové skaláry  $a \in K$  za polynomy stupně  $0$ .

Zřejmě každý polynom  $f$  definuje (stejně označovanou) funkci  $f : K \rightarrow K$  danou předpisem  $c \mapsto f(c)$ , t. j. dosazením konkrétních hodnot  $c \in K$  za proměnnou  $x$  do polynomu  $f$ .

## Příklady III - Polynomy nad daným tělesem

Množinu všech polynomů v proměnné  $x$  nad  $K$  *stupně nejvýše*  $n$ , kde  $-1 \leq n \in \mathbb{Z}$ , budeme značit  $K^{(n)}[x]$ ; množinu *všech polynomů* v proměnné  $x$  nad  $K$  značíme  $K[x]$ .

## Příklady III - Polynomy nad daným tělesem

Množinu všech polynomů v proměnné  $x$  nad  $K$  *stupně nejvýše*  $n$ , kde  $-1 \leq n \in \mathbb{Z}$ , budeme značit  $K^{(n)}[x]$ ; množinu *všech polynomů* v proměnné  $x$  nad  $K$  značíme  $K[x]$ .

Libovolný polynom  $g(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i \in K[x]$  stupně  $m < n$  můžeme psát ve tvaru

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m + 0x^{m+1} + \dots + 0x^n,$$

t. j. v tvaru  $g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$ , kde  $b_i = 0$  pro  $m < i \leq n$ .

## Příklady III - Polynomy nad daným tělesem

Množinu všech polynomů v proměnné  $x$  nad  $K$  *stupně nejvýše*  $n$ , kde  $-1 \leq n \in \mathbb{Z}$ , budeme značit  $K^{(n)}[x]$ ; množinu všech polynomů v proměnné  $x$  nad  $K$  značíme  $K[x]$ .

Libovolný polynom  $g(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i \in K[x]$  stupně  $m < n$  můžeme psát ve tvaru

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m + 0x^{m+1} + \dots + 0x^n,$$

t. j. v tvaru  $g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$ , kde  $b_i = 0$  pro  $m < i \leq n$ .

S použitím této konvence lze definovat součet  $f + g$  polynomů  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ,  $g = \sum_{i=0}^m b_i x^i$  z  $K[x]$  předpisem

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i + b_i) x^i.$$

# Příklady III - Polynomy nad daným tělesem

Pokud navíc  $c \in K$ , klademe

$$(cf)(x) = cf(x) = \sum_{i=0}^n ca_i x^i.$$

# Příklady III - Polynomy nad daným tělesem

Pokud navíc  $c \in K$ , klademe

$$(cf)(x) = cf(x) = \sum_{i=0}^n ca_i x^i.$$

Snadno ověříme, že s takto po složkách definovanými operacemi součtu a skalárního násobku tvoří každá z množin polynomů  $K^{(n)}[x]$ , kde  $-1 \leq n \in \mathbb{Z}$ , a zároveň i množina všech polynomů  $K[x]$  vektorový prostor nad tělesem  $K$ .

## Příklady IV - Matice nad daným tělesem

Matice pevného typu  $m \times n$  nad tělesem  $K$  s operacemi součtu a skalárního násobku tvoří **vektorový prostor** nad tělesem  $K$  tj.  $K^{m \times n}$  bude dále označovat příslušný vektorový prostor.

## Příklady V - Zobrazení množiny $X$ do tělesa $K$

Označme  $K^X = \{f \mid f: X \rightarrow K\}$ . Definujme **součet funkcí**  $f, g \in K^X$  jakožto funkci  $f + g$ , kde

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

pro všechna  $x \in X$ . Pro skalár  $a \in K$  a funkci  $f \in K^X$  definujeme **skalární násobek**  $a$  s  $f$  jakožto funkci  $a \cdot f$ , kde

$$(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$$

pro všechna  $x \in X$ .



## Příklady V - Zobrazení množiny $X$ do tělesa $K$

Označme  $K^X = \{f \mid f: X \rightarrow K\}$ . Definujme **součet funkcí**  $f, g \in K^X$  jakožto funkci  $f + g$ , kde

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

pro všechna  $x \in X$ . Pro skalár  $a \in K$  a funkci  $f \in K^X$  definujeme **skalární násobek**  $a$  s  $f$  jakožto funkci  $a \cdot f$ , kde

$$(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$$

pro všechna  $x \in X$ .

$K^X$  je vektorový prostor. Přitom

- Nulový vektor je nulová funkce  $\mathbf{0}$ , tj.  $\mathbf{0}(x) = 0$  pro všechna  $x \in X$ .

## Příklady V - Zobrazení množiny $X$ do tělesa $K$

Označme  $K^X = \{f \mid f: X \rightarrow K\}$ . Definujme **součet funkcí**  $f, g \in K^X$  jakožto funkci  $f + g$ , kde

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

pro všechna  $x \in X$ . Pro skalár  $a \in K$  a funkci  $f \in K^X$  definujeme **skalární násobek**  $a$  s  $f$  jakožto funkci  $a \cdot f$ , kde

$$(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$$

pro všechna  $x \in X$ .

$K^X$  je vektorový prostor. Přitom

- Nulový vektor je nulová funkce  $\mathbf{0}$ , tj.  $\mathbf{0}(x) = 0$  pro všechna  $x \in X$ .
- Opačný prvek k funkci  $f \in K^X$  je zřejmě funkce  $-f$ , kde

$$(-f)(x) = -(f(x))$$

pro všechna  $x \in X$ .

# Příklady V - Zobrazení množiny $X$ do tělesa $K$

- Zvolme  $X = [0, 1]$  a  $K = \mathbb{R}$ . Pak  $\mathbb{R}^{[0,1]}$  je množina všech reálných funkcí na intervalu  $[0, 1]$ .

# Příklady V - Zobrazení množiny $X$ do tělesa $K$

- Zvolme  $X = [0, 1]$  a  $K = \mathbb{R}$ . Pak  $\mathbb{R}^{[0,1]}$  je množina všech reálných funkcí na intervalu  $[0, 1]$ .
- $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  a  $K = \mathbb{R}$ . Potom  $\mathbb{R}^{\{1,2,3,\dots,n\}}$  je množina všech funkcí z  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  do  $\mathbb{R}$ . To ale není nic jiného, než  $n$ -tice reálných čísel  $(f(1), \dots, f(n))$  z Příkladu II.

# Obsah

- 1 Motivace
- 2 Tělesa a základní číselné obory  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$
- 3 Vektorové prostory
- 4 **Matice nad vektorovým prostorem**
  - Ztotožnění matic
  - Vektorový prostor  $V^{m \times n}$
  - Blokový tvar a násobení matic
- 5 Lineární zobrazení

# Ztotožnění matic

Matice typu  $m \times n$  nad tělesem  $K$  jsou speciálním druhem blokových matic.

# Ztotožnění matic

Matice typu  $m \times n$  nad tělesem  $K$  jsou speciálním druhem blokových matic.

Matici  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$  můžeme považovat jednak za blokovou matici s bloky  $a_{ij}$  typu  $1 \times 1$ , jednak se na ni můžeme dívat jako na řádek jejich sloupců resp. jako na sloupec jejich řádků.

# Ztotožnění matic

Matice typu  $m \times n$  nad tělesem  $K$  jsou speciálním druhem blokových matic.

Matici  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$  můžeme považovat jednak za blokovou matici s bloky  $a_{ij}$  typu  $1 \times 1$ , jednak se na ni můžeme dívat jako na řádek jejich sloupců resp. jako na sloupec jejich řádků.

$\mathbf{A}$  pak chápeme jako matici typu  $m \times 1$  nad vektorovým prostorem  $K^{1 \times n}$ , resp. jako matici typu  $1 \times n$  nad vektorovým prostorem  $K^{m \times 1}$ .



# Ztotožnění matic

Matice typu  $m \times n$  nad tělesem  $K$  jsou speciálním druhem blokových matic.

Matici  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$  můžeme považovat jednak za blokovou matici s bloky  $a_{ij}$  typu  $1 \times 1$ , jednak se na ni můžeme dívat jako na řádek jejich sloupců resp. jako na sloupec jejich řádků.

$\mathbf{A}$  pak chápeme jako matici typu  $m \times 1$  nad vektorovým prostorem  $K^{1 \times n}$ , resp. jako matici typu  $1 \times n$  nad vektorovým prostorem  $K^{m \times 1}$ .

$$\mathbf{A} = \left( \mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A}) \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \mathbf{r}_2(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix}$$

# Vektorový prostor $V^{m \times n}$ I

Pro libovolné  $m, n \in \mathbb{N}$  a libovolný (abstraktní) vektorový prostor  $V$  nad tělesem  $K$  máme definovanou množinu  $V^{m \times n}$  všech matic nad množinou  $V$ .

# Vektorový prostor $V^{m \times n}$ |

Pro libovolné  $m, n \in \mathbb{N}$  a libovolný (abstraktní) vektorový prostor  $V$  nad tělesem  $K$  máme definovanou množinu  $V^{m \times n}$  všech matic nad množinou  $V$ .

Na množině  $V^{m \times n}$  můžeme zavést operace součtu a skalárního násobku po složkách.

# Vektorový prostor $V^{m \times n}$ I

Pro libovolné  $m, n \in \mathbb{N}$  a libovolný (abstraktní) vektorový prostor  $V$  nad tělesem  $K$  máme definovanou množinu  $V^{m \times n}$  všech matic nad množinou  $V$ .

Na množině  $V^{m \times n}$  můžeme zavést operace součtu a skalárního násobku po složkách.

$V^{m \times n}$  s těmito operacemi tvoří vektorový prostor nad tělesem  $K$ .

# Vektorový prostor $V^{m \times n}$ I

Pro libovolné  $m, n \in \mathbb{N}$  a libovolný (abstraktní) vektorový prostor  $V$  nad tělesem  $K$  máme definovanou množinu  $V^{m \times n}$  všech matic nad množinou  $V$ .

Na množině  $V^{m \times n}$  můžeme zavést operace součtu a skalárního násobku po složkách.

$V^{m \times n}$  s těmito operacemi tvoří vektorový prostor nad tělesem  $K$ .

Zobecníme nyní operaci skalárního násobku  $K \times V \rightarrow V$  na operaci součinu mezi maticemi vhodných typů nad  $K$  a nad  $V$ .

## Vektorový prostor $V^{m \times n}$ II

Pro matice  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ ,  $\alpha = (\mathbf{u}_{jk}) \in V^{n \times p}$  klademe  $\mathbf{A} \cdot \alpha = (\mathbf{v}_{ik}) \in V^{m \times p}$ , kde

$$\mathbf{v}_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{u}_{jk}.$$

## Vektorový prostor $V^{m \times n}$ II

Pro matice  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ ,  $\alpha = (\mathbf{u}_{jk}) \in V^{n \times p}$  klademe  $\mathbf{A} \cdot \alpha = (\mathbf{v}_{ik}) \in V^{m \times p}$ , kde

$$\mathbf{v}_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{u}_{jk}.$$

Tedy součin  $\mathbf{A} \cdot \alpha$  definujeme z formálního hlediska stejně jako součin matic nad tělesem  $K$ , jen s tím rozdílem, že operace součtu v  $K$  je nahrazená operací součtu ve  $V$  a operace součinu v  $K$  je nahrazená operací skalárního násobku  $K \times V \rightarrow V$ .

## Vektorový prostor $V^{m \times n}$ II

Pro matice  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ ,  $\alpha = (\mathbf{u}_{jk}) \in V^{n \times p}$  klademe  $\mathbf{A} \cdot \alpha = (\mathbf{v}_{ik}) \in V^{m \times p}$ , kde

$$\mathbf{v}_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{u}_{jk}.$$

Tedy součin  $\mathbf{A} \cdot \alpha$  definujeme z formálního hlediska stejně jako součin matic nad tělesem  $K$ , jen s tím rozdílem, že operace součtu v  $K$  je nahrazená operací součtu ve  $V$  a operace součinu v  $K$  je nahrazená operací skalárního násobku  $K \times V \rightarrow V$ .

Pro násobení matic nad  $V$  maticemi nad  $K$  platí distributivita (z obou stran) vzhledem ke sčítání, zaměnitelnost s operací skalárního násobku, asociativita a postavení jednotkových matic jako neutrálních prvků (zleva).



## Vektorový prostor $V^{m \times n}$ III

To znamená, že pro všechna  $l, m, n, p \in \mathbb{N}$ ,  $c \in K$ ,  
 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{C} \in K^{l \times m}$   $\alpha, \beta \in V^{n \times p}$  platí:

$$\mathbf{A} \cdot (\alpha + \beta) = \mathbf{A} \cdot \alpha + \mathbf{A} \cdot \beta,$$

## Vektorový prostor $V^{m \times n}$ III

To znamená, že pro všechna  $l, m, n, p \in \mathbb{N}$ ,  $c \in K$ ,  
 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{C} \in K^{l \times m}$   $\alpha, \beta \in V^{n \times p}$  platí:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot (\alpha + \beta) &= \mathbf{A} \cdot \alpha + \mathbf{A} \cdot \beta, \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \alpha &= \mathbf{A} \cdot \alpha + \mathbf{B} \cdot \alpha,\end{aligned}$$

## Vektorový prostor $V^{m \times n}$ III

To znamená, že pro všechna  $l, m, n, p \in \mathbb{N}$ ,  $c \in K$ ,  
 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{C} \in K^{l \times m}$ ,  $\alpha, \beta \in V^{n \times p}$  platí:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot (\alpha + \beta) &= \mathbf{A} \cdot \alpha + \mathbf{A} \cdot \beta, \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \alpha &= \mathbf{A} \cdot \alpha + \mathbf{B} \cdot \alpha, \\ \mathbf{A} \cdot (c\alpha) &= c(\mathbf{A} \cdot \alpha) = (c\mathbf{A}) \cdot \alpha,\end{aligned}$$

## Vektorový prostor $V^{m \times n}$ III

To znamená, že pro všechna  $l, m, n, p \in \mathbb{N}$ ,  $c \in K$ ,  
 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{C} \in K^{l \times m}$ ,  $\alpha, \beta \in V^{n \times p}$  platí:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot (\alpha + \beta) &= \mathbf{A} \cdot \alpha + \mathbf{A} \cdot \beta, \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \alpha &= \mathbf{A} \cdot \alpha + \mathbf{B} \cdot \alpha, \\ \mathbf{A} \cdot (c\alpha) &= c(\mathbf{A} \cdot \alpha) = (c\mathbf{A}) \cdot \alpha, \\ \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \cdot \alpha) &= (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \cdot \alpha,\end{aligned}$$

## Vektorový prostor $V^{m \times n}$ III

To znamená, že pro všechna  $l, m, n, p \in \mathbb{N}$ ,  $c \in K$ ,  
 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{C} \in K^{l \times m}$ ,  $\alpha, \beta \in V^{n \times p}$  platí:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot (\alpha + \beta) &= \mathbf{A} \cdot \alpha + \mathbf{A} \cdot \beta, \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \alpha &= \mathbf{A} \cdot \alpha + \mathbf{B} \cdot \alpha, \\ \mathbf{A} \cdot (c\alpha) &= c(\mathbf{A} \cdot \alpha) = (c\mathbf{A}) \cdot \alpha, \\ \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \cdot \alpha) &= (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \cdot \alpha, \\ \mathbf{I}_n \cdot \alpha &= \alpha.\end{aligned}$$

## Vektorový prostor $V^{m \times n}$ III

To znamená, že pro všechna  $l, m, n, p \in \mathbb{N}$ ,  $c \in K$ ,  
 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{C} \in K^{l \times m}$ ,  $\alpha, \beta \in V^{n \times p}$  platí:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot (\alpha + \beta) &= \mathbf{A} \cdot \alpha + \mathbf{A} \cdot \beta, \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \alpha &= \mathbf{A} \cdot \alpha + \mathbf{B} \cdot \alpha, \\ \mathbf{A} \cdot (c\alpha) &= c(\mathbf{A} \cdot \alpha) = (c\mathbf{A}) \cdot \alpha, \\ \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \cdot \alpha) &= (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \cdot \alpha, \\ \mathbf{I}_n \cdot \alpha &= \alpha.\end{aligned}$$

Dle úmluvy, že  $\mathbf{x}c = c\mathbf{x}$  pro  $c \in K$ ,  $\mathbf{x} \in V$ , lze definovat i součin matic  $\beta = (v_{ij}) \in V^{m \times n}$ ,  $\mathbf{B} = (b_{jk}) \in K^{n \times p}$  v obráceném pořadí jako matici  $\beta \cdot \mathbf{B} = (w_{ik}) \in V^{m \times p}$  takovou, že

## Vektorový prostor $V^{m \times n}$ III

To znamená, že pro všechna  $l, m, n, p \in \mathbb{N}$ ,  $c \in K$ ,  
 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{C} \in K^{l \times m}$ ,  $\alpha, \beta \in V^{n \times p}$  platí:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot (\alpha + \beta) &= \mathbf{A} \cdot \alpha + \mathbf{A} \cdot \beta, \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \alpha &= \mathbf{A} \cdot \alpha + \mathbf{B} \cdot \alpha, \\ \mathbf{A} \cdot (c\alpha) &= c(\mathbf{A} \cdot \alpha) = (c\mathbf{A}) \cdot \alpha, \\ \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \cdot \alpha) &= (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \cdot \alpha, \\ \mathbf{I}_n \cdot \alpha &= \alpha.\end{aligned}$$

Dle úmluvy, že  $\mathbf{x}c = c\mathbf{x}$  pro  $c \in K$ ,  $\mathbf{x} \in V$ , lze definovat i součin matic  $\beta = (v_{ij}) \in V^{m \times n}$ ,  $\mathbf{B} = (b_{jk}) \in K^{n \times p}$  v obráceném pořadí jako matici  $\beta \cdot \mathbf{B} = (w_{ik}) \in V^{m \times p}$  takovou, že

$$w_{ik} = \sum_{j=1}^n v_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^n b_{jk} v_{ij}.$$

# Vektorový prostor $V^{m \times n}$ IV

S využitím poslední definice můžeme pro  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ ,  $\alpha \in V^{n \times p}$ ,  $\beta \in V^{m \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$  dokázat rovnosti

$$(\mathbf{A} \cdot \alpha)^T = \alpha^T \cdot \mathbf{A}^T, \quad (\beta \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \beta^T.$$



# Vektorový prostor $V^{m \times n}$ IV

S využitím poslední definice můžeme pro  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ ,  $\alpha \in V^{n \times p}$ ,  $\beta \in V^{m \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$  dokázat rovnosti

$$(\mathbf{A} \cdot \alpha)^T = \alpha^T \cdot \mathbf{A}^T, \quad (\beta \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \beta^T.$$

Tedy i pro násobení matic nad  $K$  maticemi nad  $V$  platí distributivita (z obou stran) vzhledem ke sčítání, zaměnitelnost s operací skalárního násobku, asociativita a postavení jednotkových matic jako neutrálních prvků (nyní zprava).

# Vektorový prostor $V^{m \times n}$

To znamená, že pro všechna  $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ ,  $c \in K$ ,  
 $\alpha, \beta \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in V^{n \times p}$ ,  $\mathbf{C} \in K^{p \times q}$  platí:

$$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{A} = \alpha \cdot \mathbf{A} + \beta \cdot \mathbf{A},$$

# Vektorový prostor $V^{m \times n}$

To znamená, že pro všechna  $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ ,  $c \in K$ ,  
 $\alpha, \beta \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in V^{n \times p}$ ,  $\mathbf{C} \in K^{p \times q}$  platí:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{A} &= \alpha \cdot \mathbf{A} + \beta \cdot \mathbf{A}, \\ \alpha \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \alpha \cdot \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{B},\end{aligned}$$

# Vektorový prostor $V^{m \times n}$

To znamená, že pro všechna  $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ ,  $c \in K$ ,  
 $\alpha, \beta \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in V^{n \times p}$ ,  $\mathbf{C} \in K^{p \times q}$  platí:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{A} &= \alpha \cdot \mathbf{A} + \beta \cdot \mathbf{A}, \\ \alpha \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \alpha \cdot \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{B}, \\ \alpha \cdot (c\mathbf{A}) &= c(\alpha \cdot \mathbf{A}) = (c\alpha) \cdot \mathbf{A},\end{aligned}$$

# Vektorový prostor $V^{m \times n}$

To znamená, že pro všechna  $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ ,  $c \in K$ ,  
 $\alpha, \beta \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in V^{n \times p}$ ,  $\mathbf{C} \in K^{p \times q}$  platí:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{A} &= \alpha \cdot \mathbf{A} + \beta \cdot \mathbf{A}, \\ \alpha \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \alpha \cdot \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{B}, \\ \alpha \cdot (c\mathbf{A}) &= c(\alpha \cdot \mathbf{A}) = (c\alpha) \cdot \mathbf{A}, \\ \alpha \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) &= (\alpha \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C},\end{aligned}$$

# Vektorový prostor $V^{m \times n}$

To znamená, že pro všechna  $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ ,  $c \in K$ ,  
 $\alpha, \beta \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in V^{n \times p}$ ,  $\mathbf{C} \in K^{p \times q}$  platí:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{A} &= \alpha \cdot \mathbf{A} + \beta \cdot \mathbf{A}, \\ \alpha \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \alpha \cdot \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{B}, \\ \alpha \cdot (c\mathbf{A}) &= c(\alpha \cdot \mathbf{A}) = (c\alpha) \cdot \mathbf{A}, \\ \alpha \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) &= (\alpha \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C}, \\ \alpha \cdot \mathbf{I}_n &= \alpha.\end{aligned}$$

# Vektorový prostor $V^{m \times n}$

To znamená, že pro všechna  $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ ,  $c \in K$ ,  
 $\alpha, \beta \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in V^{n \times p}$ ,  $\mathbf{C} \in K^{p \times q}$  platí:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{A} &= \alpha \cdot \mathbf{A} + \beta \cdot \mathbf{A}, \\ \alpha \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \alpha \cdot \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{B}, \\ \alpha \cdot (c\mathbf{A}) &= c(\alpha \cdot \mathbf{A}) = (c\alpha) \cdot \mathbf{A}, \\ \alpha \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) &= (\alpha \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C}, \\ \alpha \cdot \mathbf{I}_n &= \alpha.\end{aligned}$$

Vztahy pro řádky a sloupce součinu zůstávají zachované pro oba typy součinů matic nad  $K$  a  $V$ , tj.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i(\mathbf{A} \cdot \alpha) &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \alpha, & \mathbf{s}_k(\mathbf{A} \cdot \alpha) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_k(\alpha) \\ \mathbf{r}_i(\beta \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{r}_i(\beta) \cdot \mathbf{B}, & \mathbf{s}_k(\beta \cdot \mathbf{B}) &= \beta \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{B})\end{aligned}$$

pre všechny  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ ,  $\alpha \in V^{n \times p}$ ,  $\beta \in V^{m \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$ .

# Blokový tvar a násobení matic I

Definice součinů  $\mathbf{A} \cdot \alpha$ ,  $\beta \cdot \mathbf{B}$  jsou ve shodě s původním násobením matic.



# Blokový tvar a násobení matic I

Definice součinů  $\mathbf{A} \cdot \alpha$ ,  $\beta \cdot \mathbf{B}$  jsou ve shodě s původním násobením matic.

Chápeme-li matici  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$  jakožto řádek, tj. jakožto matici typu  $1 \times n$  nad prostorem sloupcových vektorů  $K^m$ , tak pro  $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$  splývá matice  $(\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \cdot \mathbf{B}$  vypočítaná podle "nové" definice s blokovým tvarem  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_1(\mathbf{B}), \dots, \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_p(\mathbf{B}))$  matice  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ .

# Blokový tvar a násobení matic I

Definice součinů  $\mathbf{A} \cdot \alpha$ ,  $\beta \cdot \mathbf{B}$  jsou ve shodě s původním násobením matic.

Chápeme-li matici  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$  jakožto řádek, tj. jakožto matici typu  $1 \times n$  nad prostorem sloupcových vektorů  $K^m$ , tak pro  $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$  splývá matice  $(\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \cdot \mathbf{B}$  vypočítaná podle "nové" definice s blokovým tvarem  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_1(\mathbf{B}), \dots, \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_p(\mathbf{B}))$  matice  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ .

Podobně, chápeme-li  $\mathbf{B}$  jako sloupec, tj. jako matici typu  $n \times 1$  nad prostorem řádkových vektorů  $K^p$ , tak

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{B}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n(\mathbf{B}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

# Blokový tvar a násobení matic II

Speciálně, lineární kombinaci  $a_1 \mathbf{x}_1 + \dots + a_n \mathbf{x}_n$  vektorů  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in V$  s koeficienty  $a_1, \dots, a_n \in K$  můžeme s využitím vektorových matic zapsat ve tvaru součinů

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

# Obsah

- 1 Motivace
- 2 Tělesa a základní číselné obory  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$
- 3 Vektorové prostory
- 4 Matice nad vektorovým prostorem
- 5 **Lineární zobrazení**
  - Definice lineárního zobrazení
  - Příklady
  - Vlastnosti lineárního zobrazení

# Definice lineárního zobrazení I

Nechť  $U, V$  jsou vektorové prostory nad tělesem  $K$ .

# Definice lineárního zobrazení I

Nechť  $U, V$  jsou vektorové prostory nad tělesem  $K$ .

Říkáme, že  $\varphi: V \rightarrow U$  je **lineární zobrazení**, pokud  $\varphi$  zachovává operace vektorového součtu a skalárního násobku,

# Definice lineárního zobrazení I

Nechť  $U, V$  jsou vektorové prostory nad tělesem  $K$ .

Říkáme, že  $\varphi: V \rightarrow U$  je **lineární zobrazení**, pokud  $\varphi$  zachovává operace vektorového součtu a skalárního násobku,

tj. pokud pro libovolné  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ,  $c \in K$  platí

$$\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}),$$

# Definice lineárního zobrazení I

Nechť  $U, V$  jsou vektorové prostory nad tělesem  $K$ .

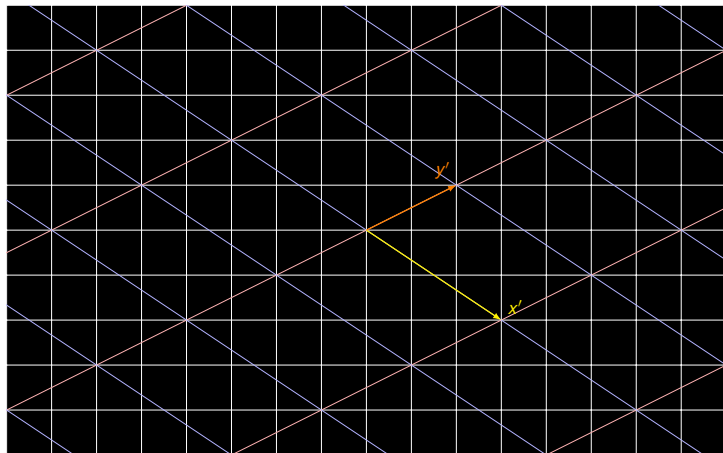
Říkáme, že  $\varphi: V \rightarrow U$  je **lineární zobrazení**, pokud  $\varphi$  zachovává operace vektorového součtu a skalárního násobku,

tj. pokud pro libovolné  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, c \in K$  platí

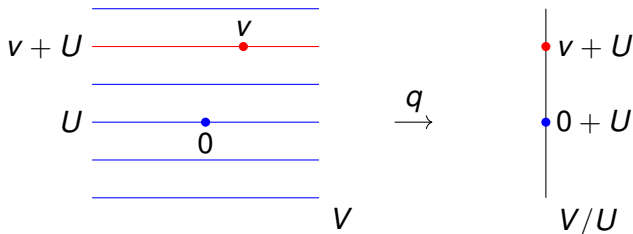
$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}), \\ \varphi(c\mathbf{x}) &= c\varphi(\mathbf{x}).\end{aligned}$$



# Definice lineárního zobrazení II - příklad



## Definice lineárního zobrazení III - příklad



# Příklady I

## Příklad 5.1

*Nechť  $K$  je těleso. Distributivita součinu matic vzhledem k jejich součtu a jeho zaměnitelnosti s operací skalárního násobku říká,*

# Příklady I

## Příklad 5.1

*Nechť  $K$  je těleso. Distributivita součinu matic vzhledem k jejich součtu a jeho zaměnitelnosti s operací skalárního násobku říká, že pro pevné  $m, n, p \in \mathbb{N}$  a libovolnou matici  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$  je přiřazením  $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$  definované lineární zobrazení mezi vektorovými prostory matic  $K^{n \times p} \rightarrow K^{m \times p}$ .*

# Příklady I

## Příklad 5.1

*Nechť  $K$  je těleso. Distributivita součinu matic vzhledem k jejich součtu a jeho zaměnitelnosti s operací skalárního násobku říká,*

*že pro pevné  $m, n, p \in \mathbb{N}$  a libovolnou matici  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$  je přiřazením  $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$  definované lineární zobrazení mezi vektorovými prostory matic  $K^{n \times p} \rightarrow K^{m \times p}$ .*

*Podobně je přiřazením  $\mathbf{Y} \mapsto \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}$  definované lineární zobrazení  $K^{p \times m} \rightarrow K^{p \times n}$ .*

# Příklady I

## Příklad 5.1

*Nechť  $K$  je těleso. Distributivita součinu matic vzhledem k jejich součtu a jeho zaměnitelnosti s operací skalárního násobku říká,*

*že pro pevné  $m, n, p \in \mathbb{N}$  a libovolnou matici  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$  je přiřazením  $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$  definované lineární zobrazení mezi vektorovými prostory matic  $K^{n \times p} \rightarrow K^{m \times p}$ .*

*Podobně je přiřazením  $\mathbf{Y} \mapsto \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}$  definované lineární zobrazení  $K^{p \times m} \rightarrow K^{p \times n}$ .*

*Speciálně pro  $p = 1$  je takto definované lineární zobrazení  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  mezi sloupcovými vektorovými prostory  $K^n \rightarrow K^m$ , resp. lineární zobrazení  $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{y} \cdot \mathbf{A}$  mezi řádkovými vektorovými prostory  $K^m \rightarrow K^n$ .*

# Příklady I

## Příklad 5.1

*Nechť  $K$  je těleso. Distributivita součinu matic vzhledem k jejich součtu a jeho zaměnitelnosti s operací skalárního násobku říká,*

*že pro pevné  $m, n, p \in \mathbb{N}$  a libovolnou matici  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$  je přiřazením  $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$  definované lineární zobrazení mezi vektorovými prostory matic  $K^{n \times p} \rightarrow K^{m \times p}$ .*

*Podobně je přiřazením  $\mathbf{Y} \mapsto \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}$  definované lineární zobrazení  $K^{p \times m} \rightarrow K^{p \times n}$ .*

*Speciálně pro  $p = 1$  je takto definované lineární zobrazení  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  mezi sloupcovými vektorovými prostory  $K^n \rightarrow K^m$ , resp. lineární zobrazení  $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{y} \cdot \mathbf{A}$  mezi řádkovými vektorovými prostory  $K^m \rightarrow K^n$ .*

*Každé lineární zobrazení mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad  $K$  má v podstatě takovůto tvar*

# Příklady II

## Příklad 5.2

*Necht'  $K$  je těleso.*



# Příklady II

## Příklad 5.2

*Nechť  $K$  je těleso.*

*Pro  $m, n \in \mathbb{N}$  a pevné  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$  jsou předpisy*

# Příklady II

## Příklad 5.2

*Nechť  $K$  je těleso.*

*Pro  $m, n \in \mathbb{N}$  a pevné  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$  jsou předpisy*

*$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{r}_i(\mathbf{A})$ ,  $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{s}_j(\mathbf{A})$  definovaná lineární zobrazení  
 $K^{m \times n} \rightarrow K^{1 \times n}$  resp.  $K^{m \times n} \rightarrow K^{m \times 1}$ .*

# Příklady II

## Příklad 5.2

*Nechť  $K$  je těleso.*

*Pro  $m, n \in \mathbb{N}$  a pevné  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$  jsou předpisy*

*$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{r}_i(\mathbf{A})$ ,  $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{s}_j(\mathbf{A})$  definovaná lineární zobrazení  
 $K^{m \times n} \rightarrow K^{1 \times n}$  resp.  $K^{m \times n} \rightarrow K^{m \times 1}$ .*

*Rovněž  $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}^T$  je lineární zobrazení  $K^{m \times n} \rightarrow K^{n \times m}$ .*

# Příklady III

## Příklad 5.3

*Nechť  $V$  je vektorový prostor nad tělesem  $K$ ,  $X$  je množina a  $x \in X$  je pevně zvolený prvek.*

# Příklady III

## Příklad 5.3

*Nechť  $V$  je vektorový prostor nad tělesem  $K$ ,  $X$  je množina a  $x \in X$  je pevně zvolený prvek.*

*Připomeňme, že  $V^X$  je vektorový prostor všech funkcí  $f : X \rightarrow V$ . Dosazení prvku  $x$  do funkce  $f$ , tj. přiřazení  $f \mapsto f(x)$ , je lineární zobrazení  $V^X \rightarrow V$ .*

# Příklady III

## Příklad 5.3

*Nechť  $V$  je vektorový prostor nad tělesem  $K$ ,  $X$  je množina a  $x \in X$  je pevně zvolený prvek.*

*Připomeňme, že  $V^X$  je vektorový prostor všech funkcí  $f : X \rightarrow V$ . Dosazení prvku  $x$  do funkce  $f$ , tj. přiřazení  $f \mapsto f(x)$ , je lineární zobrazení  $V^X \rightarrow V$ .*

*Podobně, pro libovolnou podmnožinu  $Y \subseteq X$  je zúžení  $f \mapsto f \upharpoonright Y$  lineární zobrazení  $V^X \rightarrow V^Y$ .*

# Příklady IV

## Příklad 5.4

*Označme  $V$  množinu všech konvergentních posloupností reálných čísel.*

# Příklady IV

## Příklad 5.4

*Označme  $V$  množinu všech konvergentních posloupností reálných čísel.*

*Zřejmě  $V$  je lineární podprostor vektorového prostoru  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  všech posloupností reálných čísel.*



# Příklady IV

## Příklad 5.4

*Označme  $V$  množinu všech konvergentních posloupností reálných čísel.*

*Zřejmě  $V$  je lineární podprostor vektorového prostoru  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  všech posloupností reálných čísel.*

*Pak zobrazení  $V \rightarrow \mathbb{R}$ , které posloupnosti  $\mathbf{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty} \in V$  přiřadí její limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , je lineární.*

# Příklady V

## Příklad 5.5

Uvažujme projekci  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tvaru  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

# Příklady V

## Příklad 5.5

Uvažujme projekci  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tvaru  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

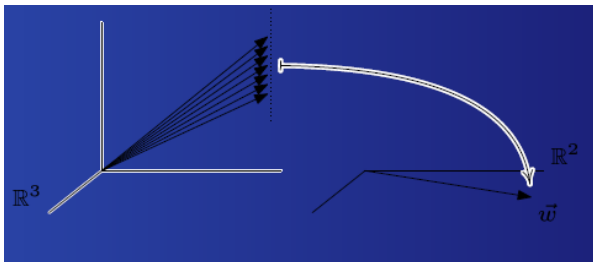
Tato projekce je lineární zobrazení, které není prosté a je surjektivní. Totiž vzor nějakého vektoru  $v \in \mathbb{R}^2$  je vertikální přímka vektorů  $z \in \mathbb{R}^3$ .

# Příklady V

## Příklad 5.5

Uvažujme projekci  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tvaru  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

Tato projekce je lineární zobrazení, které není prosté a je surjektivní. Totiž vzor nějakého vektoru  $v$  v  $\mathbb{R}^2$  je vertikální přímka vektorů z  $\mathbb{R}^3$ .



# Příklady VI

## Příklad 5.6

*Následující lineární zobrazení  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  dané předpisem*

# Příklady VI

## Příklad 5.6

Následující lineární zobrazení  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  dané předpisem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{h} x + y$$

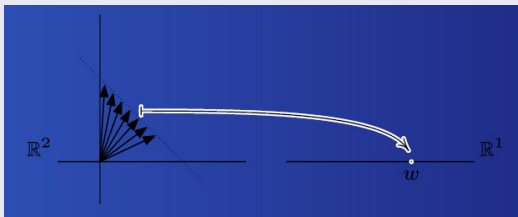
# Příklady VI

## Příklad 5.6

Následující lineární zobrazení  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  dané předpisem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{h} x + y$$

není rovněž prosté. Pro pevné  $w \in \mathbb{R}^1$  je totiž jeho vzor  $h^{-1}(w)$  množina všech vektorů v rovině,



jejichž souřadnice po sečtení dávají právě  $w$ .

# Příklady VII

## Příklad 5.7

*Vzory mohou samozřejmě být jiné struktury než výše použité přímky. Pro lineární zobrazení  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definované předpisem*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix},$$

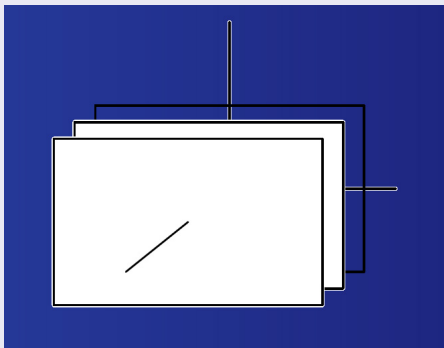


## Příklady VII

## Příklad 5.7

*Vzory mohou samozřejmě být jiné struktury než výše použité přímky. Pro lineární zobrazení  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definované předpisem*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix},$$

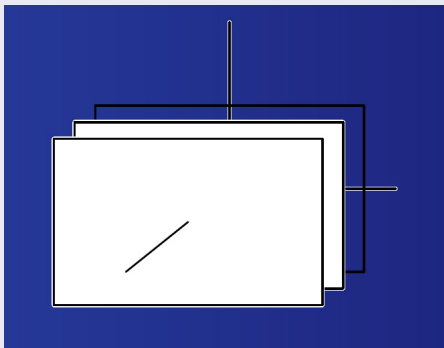


# Příklady VII

## Příklad 5.7

*Vzory mohou samozřejmě být jiné struktury než výše použité přímky. Pro lineární zobrazení  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definované předpisem*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix},$$



*jsou příslušné vzory roviny  $x = 0$ ,  $x = 1$ , atd., kolmé k ose  $x$ .*

# Vlastnosti lineárního zobrazení I

Lineární zobrazení zachovávají nulový vektor a opačné vektory,

# Vlastnosti lineárního zobrazení I

Lineární zobrazení zachovávají nulový vektor a opačné vektory, tj. pro lineární zobrazení  $\varphi: V \rightarrow U$  a  $\mathbf{x} \in V$  platí

$$\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \varphi(-\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x}).$$

# Vlastnosti lineárního zobrazení I

Lineární zobrazení zachovávají nulový vektor a opačné vektory, tj. pro lineární zobrazení  $\varphi: V \rightarrow U$  a  $\mathbf{x} \in V$  platí

$$\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \varphi(-\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x}).$$

Pro každý vektorový prostor  $V$  je identické zobrazení  $\text{id}_V: V \rightarrow V, x \mapsto x$  lineární.

# Vlastnosti lineárního zobrazení I

Lineární zobrazení zachovávají nulový vektor a opačné vektory, tj. pro lineární zobrazení  $\varphi: V \rightarrow U$  a  $\mathbf{x} \in V$  platí

$$\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \varphi(-\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x}).$$

Pro každý vektorový prostor  $V$  je identické zobrazení  $\text{id}_V: V \rightarrow V, x \mapsto x$  lineární.

Pro libovolné vektorové prostory  $U, V$  nad tělesem  $K$  zobrazení  $\mathbf{0}: V \rightarrow U$ , které každému vektoru  $\mathbf{x} \in V$  přiřadí nulový vektor  $\mathbf{0} \in U$ , je lineární.

# Vlastnosti lineárního zobrazení I

Lineární zobrazení zachovávají nulový vektor a opačné vektory, tj. pro lineární zobrazení  $\varphi: V \rightarrow U$  a  $\mathbf{x} \in V$  platí

$$\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \varphi(-\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x}).$$

Pro každý vektorový prostor  $V$  je identické zobrazení  $\text{id}_V: V \rightarrow V, x \mapsto x$  lineární.

Pro libovolné vektorové prostory  $U, V$  nad tělesem  $K$  zobrazení  $\mathbf{0}: V \rightarrow U$ , které každému vektoru  $\mathbf{x} \in V$  přiřadí nulový vektor  $\mathbf{0} \in U$ , je lineární.

Komutativita operace součinu v tělese a jeho distributivita vzhledem na sčítání znamená, že pro libovolný pevný skalár  $a \in K$  je přiřazením  $x \mapsto ax$  definované lineární zobrazení  $K \rightarrow K$ .

## Vlastnosti lineárního zobrazení II

Lineární zobrazení můžeme charakterizovat jako zobrazení mezi vektorovými prostory (nad tím stejným tělesem), které zachovávají lineární kombinace.



## Vlastnosti lineárního zobrazení II

Lineární zobrazení můžeme charakterizovat jako zobrazení mezi vektorovými prostory (nad tím stejným tělesem), které zachovávají lineární kombinace.

### Tvrzení 5.8

*Nechť  $U, V$  jsou vektorové prostory nad tělesem  $K$  a  $\varphi: V \rightarrow U$  je libovolné zobrazení. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

## Vlastnosti lineárního zobrazení II

Lineární zobrazení můžeme charakterizovat jako zobrazení mezi vektorovými prostory (nad tím stejným tělesem), které zachovávají lineární kombinace.

### Tvrzení 5.8

*Nechť  $U, V$  jsou vektorové prostory nad tělesem  $K$  a  $\varphi: V \rightarrow U$  je libovolné zobrazení. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (i)  $\varphi$  je lineární zobrazení;*

## Vlastnosti lineárního zobrazení II

Lineární zobrazení můžeme charakterizovat jako zobrazení mezi vektorovými prostory (nad tím stejným tělesem), které zachovávají lineární kombinace.

### Tvrzení 5.8

*Nechť  $U, V$  jsou vektorové prostory nad tělesem  $K$  a  $\varphi: V \rightarrow U$  je libovolné zobrazení. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (i)  $\varphi$  je lineární zobrazení;*
- (ii) pre všechna  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ,  $a, b \in K$  platí*  
$$\varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\varphi(\mathbf{x}) + b\varphi(\mathbf{y});$$

# Vlastnosti lineárního zobrazení II

Lineární zobrazení můžeme charakterizovat jako zobrazení mezi vektorovými prostory (nad tím stejným tělesem), které zachovávají lineární kombinace.

## Tvrzení 5.8

*Nechť  $U, V$  jsou vektorové prostory nad tělesem  $K$  a  $\varphi: V \rightarrow U$  je libovolné zobrazení. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (i)  $\varphi$  je lineární zobrazení;*
- (ii) pro všechna  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, a, b \in K$  platí*  
$$\varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\varphi(\mathbf{x}) + b\varphi(\mathbf{y});$$
- (iii) pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$  a všechna  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in V,$   
 $c_1, \dots, c_n \in K$  platí*  
$$\varphi(c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_n\mathbf{x}_n) = c_1\varphi(\mathbf{x}_1) + \dots + c_n\varphi(\mathbf{x}_n).$$