5. VEKTOROVÉ PROSTORY

Jan Paseka

Ústav matematiky a statistiky
Masarykova univerzita

14. října 2024

Obsah

Abstrakt

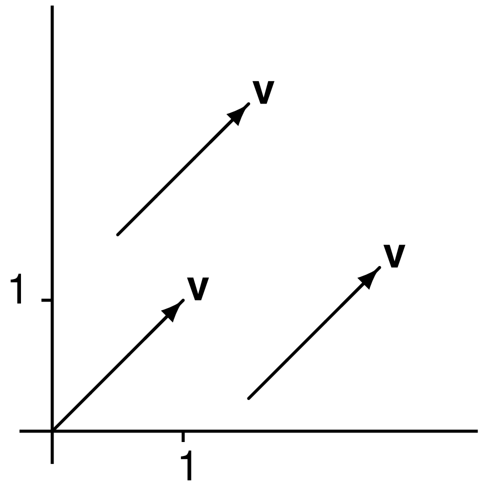
V této kapitole zavedeme dva pojmy, které budou hrát v následujícím výkladu klíčovou úlohu a dokážeme o nich několik jednoduchých tvrzení. Půjde o pojem **tělesa** a **vektorového prostoru**. Dále prozkoumáme pojem ***lineárního zobrazení***.
Prvky tělesa budeme nazývat **skaláry** a prvky vektorového prostoru **vektory**.

Abstrakt
Motivace
Tělesa
Vektorové prostory
Matice nad vektory
Lineární zobrazení
Geometrie

Obsah

Geometrická interpretace vektorů

Vektory v rovině či v prostoru si představujeme jako orientované úsečky, tj. úsečky, jejichž jeden krajní bod považujeme za počáteční a druhý za koncový – ten je označený obvykle šipkou.

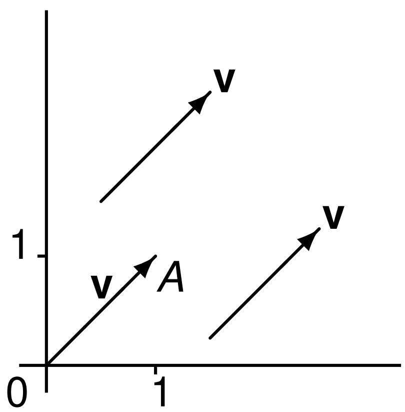


Přitom dvě stejně dlouhé, rovnoběžné a souhlasně orientované úsečky představují ten stejný vektor – říkáme, že jsou ***umístění*** téhož vektoru.

Abstrakt
Motivace
Tělesa
Vektorové prostory
Matice nad vektory
Lineární zobrazení
Geometrie

Geometrická interpretace vektorů

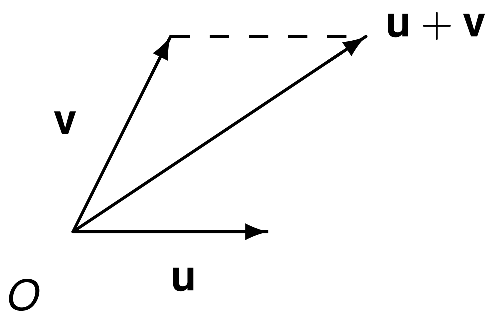
Zvolíme-li si nějaký pevný bod O, pak všechny vektory v rovině či v prostoru můžeme jednoznačně reprezentovat jako orientované úsečky $\overrightarrow{OA}$ s počátkem v O.
Jejich koncem může být libovolný bod A roviny či prostoru, bod O nevyjímaje – orientovaná úsečka $\overrightarrow{OO}$ totiž představuje tzv. nulový vektor.

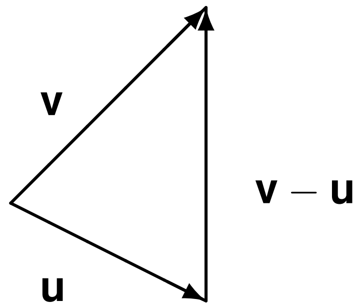


Geometrická interpretace vektorů

Vektory v rovině či v prostoru můžeme sčítat pomocí tzv. ***vektorového rovnoběžníku***.

Součet vektorů $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$ je potom znázorněný orientovanou uhlopříčkou $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{OC}$ rovnoběžníka, jehož dvě přilehlé strany tvoří úsečky OA, OB.





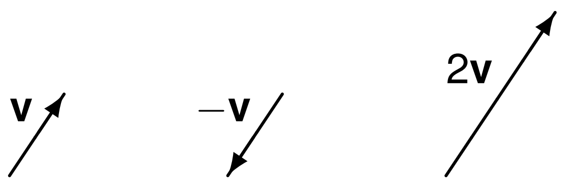
Abstrakt
Motivace
Tělesa
Vektorové prostory
Matice nad vektory
Lineární zobrazení
Geometrie

Geometrická interpretace vektorů

Vektory můžeme rovněž násobit libovolnými skaláry, tj. v našem případě reálnými čísly:

pokud $c \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{v}$ je vektor, tak $c\mathbf{v}$ je vektor, tj. orientovaná úsečka s počátkem v O, jejíž délka je $|c|$-násobkem délky úsečky $\mathbf{v}$, leží na té stejné přímce jako $\mathbf{v}$ a je orientovaná souhlasně s $\mathbf{v}$, pokud $c > 0$, resp. nesouhlasně s $\mathbf{v}$, pokud $c < 0$

(je-li $c = 0$ nebo $\mathbf{v}$ je nulový vektor, tak, samozřejmě, i $c\mathbf{v}$ je nulový vektor, takže nezáleží na jeho směru ani orientaci).



Geometrická interpretace vektorů

Pokud si mimo počátek O zvolíme v rovině či prostoru ještě dvě resp. tři souřadné osy, tj. navzájem kolmé přímky procházející počátkem, a na každé z nich jeden bod ve stejné jednotkové vzdálenosti od počátku, dostaneme pravouhlý souřadnicový systém v rovině či v prostoru.

Každý bod roviny či prostoru je potom jednoznačně určený uspořádanou dvojicí, resp. trojicí svých souřadnic a naopak, každá dvojice resp. trojice souřadnic jednoznačně určuje nějaký bod roviny či prostoru.

Při pevném souřadnicovém systému tak můžeme množinu všech vektorů v rovině ztotožnit s množinou $\mathbb{R}^2$ a množinu všech vektorů v prostoru s množinou $\mathbb{R}^3$.

Geometrická interpretace vektorů

Jsou-li (při takovémto ztotožnění) $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ dva vektory v rovině, tak snadno ověříme, že pro jejich součet $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, daný vektorovým rovnoběžníkem, platí

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

Je-li $c \in \mathbb{R}$, pak pro skalární násobek $c\mathbf{u}$ dostáváme

$$c\mathbf{u} = c(u_1, u_2) = (cu_1, cu_2).$$

Podobně to můžeme ověřit pro vektory v prostoru, tj. uspořádané trojice reálných čísel.

Geometrická interpretace vektorů

Navíc si všimněme, že předpoklady kolmosti souřadných os a rovnosti jednotkových délek v jednotlivých směrech nehrály v našich úvahách žádnou roli.

Stačí, aby systém souřadných os tvořily dvě různoběžné přímky (v rovině) resp. tři přímky neležící v rovině (v prostoru) protínající se v počátku O.

Za jednotkové délky ve směrech jednotlivých souřadných os můžeme zvolit délky libovolných (ne nutně stejně dlouhých) úseček.

Obsah

Základní pojmy

$\mathbb{N}$ – množina všech přirozených čísel,
$\mathbb{Z}$ – množina všech celých čísel,
$\mathbb{Q}$ – množina všech racionálních čísel,

$\mathbb{R}$ – množina všech reálnych čísel,
$\mathbb{C}$ – množina všech komplexních čísel.

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

Nulu považujeme za přirozené číslo, tj. $0 \in \mathbb{N}$.

Imaginární jednotku (která je prvkem $\mathbb{C} - \mathbb{R}$) budeme značit $\imath$.

Prvky výše uvedených číselných oborů $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ nazýváme často *skaláry*. V tomto případě pak budeme mluvit o *číselném tělese*.

Struktura číselných oborů I

Na každé z množin $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ jsou definované dvě binární operace, *sčítaní* $+$ a *násobení* $\cdot$.
Obě tyto operace jsou asociativní a komutativní.

Násobení je (z obou stran) *distributivní* vzhledem ke sčítání, tj. pro všechny prvky x, y, z příslušné množiny platí

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \qquad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Číselný obor $\mathbb{N}$ je v porovnaní s obory $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ "chudší" – totiž rovnice tvaru $x + a = b$ mají v oborech $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ řešení $x = b - a$ pre libovolné a, b, ale v $\mathbb{N}$ je takováto rovnice řešitelná, pokud $a \leq b$.

Obory $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ jsou však "bohatší" nejen v porovnání s $\mathbb{N}$, ale i s $\mathbb{Z}$ – rovnice tvaru $ax = b$ mají v oborech $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ řešení pro libovolné $a \neq 0$ a b, přičemž v $\mathbb{N}$ či $\mathbb{Z}$ jsou řešitelné, pouze pokud a je dělitelem b.

Axiomy tělesa I

Tělesem nazýváme množinu K s dvěma význačnými prvky – ***nulou*** 0 a ***jedničkou*** 1 – a dvěma binárními operacemi na K – ***sčítáním*** $+$ a ***násobením*** $\cdot$ – takovými, že platí

$$(\forall a, b \in K)(a + b = b + a), \ (\forall a, b \in K)(a \cdot b = b \cdot a),$$

$$(\forall a, b, c \in K)(a + (b + c) = (a + b) + c),$$
$$(\forall a, b, c \in K)(a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c),$$

$$(\forall a \in K)(0 + a = a), \qquad (\forall a \in K)(1 \cdot a = a),$$

$$(\forall a \in K)(\exists b \in K)(a + b = 0),$$
$$(\forall a \in K \setminus \{0\})(\exists b \in K)(a \cdot b = 1),$$

$$(\forall a, b, c \in K)(a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)), \quad 0 \neq 1.$$

Abstrakt Motivace | Tělesa Vektorové prostory | Matice nad vektory Lineární zobrazení | Číselné obory Axiomy tělesa | Vlastnosti těles Konečná tělesa

Axiomy tělesa II

Sčítání a násobení v tělese jsou komutativní a asociativní operace a násobení je distributivní vzhledem ke sčítání.

0 je neutrální prvek sčítání a 1 je neutrální prvek násobení a tyto prvky jsou navzájem různé.

Prvek $b \in K$ takový, že $a + b = 0$, je k danému $a \in K$ určený jednoznačně.
Tento jednoznačně určený prvek k danému a označujeme $-a$ a nazýváme ***opačný prvek*** k a. Místo $a + (-b)$ píšeme jen $a - b$.

Analogicky se lze přesvědčit, že i prvek $b \in K$ takový, že $a \cdot b = 1$ je k danému $0 \neq a \in K$ určený jednoznačně – označujeme ho a^{-1} nebo $\frac{1}{a}$, případně $1/a$ a nazýváme ***inverzní prvek*** k a nebo ***převrácená hodnota*** prvku a.

Místo $a \cdot b^{-1}$ píšeme též $\frac{a}{b}$ nebo a/b.

Vlastnosti těles I

Tvrzení 2.1

Buď K těleso. Potom pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $a, b, c, b_1, \ldots, b_n \in K$ platí

(a) $a + b = a + c \;\Rightarrow\; b = c,$

(b) $(a \cdot b = a \cdot c \;\&\; a \neq 0) \;\Rightarrow\; b = c,$

(c) $a \cdot 0 = 0,$

(d) $a \cdot b = 0 \;\Rightarrow\; (a = 0 \vee b = 0),$

(e) $-a = (-1) \cdot a,$

(f) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c,$

(g) $a \cdot (b_1 + \ldots + b_n) = a \cdot b_1 + \ldots + a \cdot b_n.$

Doplňme, že podmínky (a) a (b) sa nazývají ***zákony o krácení*** pro sčítaní resp. násobení v tělese.

Abstrakt Motivace | Tělesa Vektorové prostory | Matice nad vektory Lineární zobrazení | Číselné obory Axiomy tělesa | Vlastnosti těles Konečná tělesa

Vlastnosti těles II

Podmínka (e) nám umožňuje zavést libovolné celočíselné násobky prvků z tělesa.

Pro $a \in K$, $n \in \mathbb{N}$ klademe $(-n)a = -(na) = n(-a)$.

Podobně lze pro nenulové prvky tělesa zavést i libovolné celočíselné mocniny. Pro $0 \neq a \in K$, $n \in \mathbb{N}$ klademe $a^{-n} = (a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$.

$$0a = 0, \quad 1a = a, \quad a^0 = 1, \quad a^1 = a,$$

$$n(a+b) = na + nb, \quad (m+n)a = ma + na,$$

$$(mn)a = m(na), \qquad (mn)(a \cdot b) = (ma) \cdot (nb),$$

$$\begin{array}{ll} (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, & n < 0 \;\Rightarrow\; a \neq 0 \neq b, \\ a^{m+n} = a^m \cdot a^n, & (m < 0 \vee n < 0) \;\Rightarrow\; a \neq 0, \\ a^{mn} = (a^m)^n, & (m < 0 \vee n < 0) \;\Rightarrow\; a \neq 0 \\ & \forall a, b \in K,\; m, n \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Vlastnosti těles III

Nechť K je těleso a $L \subseteq K$. Říkáme, že L je ***podtěleso*** tělesa K, pokud $0, 1 \in L$ a pro všechna $a, b \in L$ platí $a + b \in L$, $ab \in L$, $-a \in L$ a, pokud $a \neq 0$, tak i $a^{-1} \in L$.

Podtěleso tělesa K je tedy jeho podmnožina L, která obsahuje nulu a jedničku a je uzavřená vzhledem ke sčítání, násobení, opačnému a inverznímu prvku. Zřejmě každé podtěleso tělesa K je s těmito operacemi zúženými z K na L i samo tělesem. Říkáme pak, že těleso K je ***rozšířením*** tělesa L.

Zřejmě těleso $\mathbb{Q}$ je podtělesem tělesa $\mathbb{R}$ i tělesa $\mathbb{C}$; těleso $\mathbb{C}$ je rozšířením těles $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$.

Vlastnosti těles IV

Charakteristikou tělesa K, píšeme $\mathrm{char} K$, nazýváme nejmenší kladné celé číslo n takové, že $n1 = 0$; pokud takové n neexistuje, t. j. $n1 \neq 0$ pro každé celé $n > 0$, říkáme že K má charakteristiku ∞ (někteří autoři definují $\mathrm{char} K = 0$).

Je-li těleso K rozšířením tělesa L, tak obě tělesa K a L mají tutéž jedničku i nulu, a proto $\mathrm{char} K = \mathrm{char} L$.

Zřejmě $\mathrm{char} \mathbb{Q} = \mathrm{char} \mathbb{R} = \mathrm{char} \mathbb{C} = \infty$.

Věta 2.2

Nechť K je těleso. Potom $\mathrm{char} K$ je rovna ∞ nebo prvočíslu.

Konečná tělesa I

V tomto odstavci si ukážeme příklady těles, jejichž charakteristika není ∞. Z tohoto důvodu se tato tělesa podstatně liší od nám známých číselných těles.

Totiž, pro každé prvočíslo p sestrojíme jisté konečné těleso $\mathbb{Z}_p$, které má p prvků a charakteristiku p. Naopak, dříve uvedená číselná tělesa jsou nekonečná.

Pro potřeby matematické analýzy, tedy i z hlediska fyzikálních aplikací, jsou nejdůležitějšími tělesy $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$. Konečná tělesa však v současnosti sehrávají důležitou úlohu např. v teorii kódování a kryptografii.

Abstrakt
Motivace
Tělesa
Vektorové prostory
Matice nad vektory
Lineární zobrazení
Číselné obory
Axiomy tělesa
Vlastnosti těles
Konečná tělesa

Konečná tělesa II

Pro každé kladné celé číslo n označme

$$\mathbb{Z}_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k < n\} = \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Množinu $\mathbb{Z}_n$ nazýváme ***množinou zbytkových tříd modulo*** n. Na této množině zavedeme dvě binární operace – sčítání $\oplus$ a násobení $\odot$ (je nutné odlišit sčítání a násobení v $\mathbb{Z}_n$ od příslušných operací $+$ a $\cdot$ v $\mathbb{Z}$).

Pro $a, b \in \mathbb{Z}_n$ klademe

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \text{zbytek po dělení } a + b \text{ číslem } n, \\ a \odot b &= \text{zbytek po dělení } a \cdot b \text{ číslem } n. \end{aligned}$$

Konečná tělesa III

$\oplus$ a $\odot$ jsou asociativní a komutativní operace na $\mathbb{Z}_n$, 0 je neutrální prvek sčítání a, pro $n > 1$, 1 je neutrální prvek násobení.

Násobení je distributivní vzhledem ke sčítání a dále $\ominus a = n - a$ je opačný prvek k $a \in \mathbb{Z}_n$.

Věta 2.3

Množina $\mathbb{Z}_n$ s operacemi $\oplus$ a $\odot$ je těleso právě tehdy, když n je prvočíslo.

Konečná tělesa IV

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Multiplikativní tabulky sčítání a násobení v tělese $\mathbb{Z}_5$.

Obsah

Abstrakt Motivace | Tělesa Vektorové prostory | Matice nad vektory Lineární zobrazení | Vektorové prostory | Příklady

Vektorové prostory I

Buď K (číselné) těleso. ***Vektorovým*** nebo též ***lineárním prostorem*** nad K nazýváme množinu V s význačným prvkem $\mathbf{0}$ a dvěma binárními operacemi – ***sčítáním*** $+ : V \times V \to V$ a ***násobením*** $\cdot : K \times V \to V$ – takovými, že platí

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V)(\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}),$$
$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}),$$
$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}),$$
$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\exists \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}),$$

$$(\forall a, b \in K)(\forall \mathbf{x} \in V)(a \cdot (b \cdot \mathbf{x}) = (ab) \cdot \mathbf{x}),$$

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}),$$

$$(\forall a \in K)(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(a \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (a \cdot \mathbf{x}) + (a \cdot \mathbf{y})),$$
$$(\forall a, b \in K)(\forall \mathbf{x} \in V)((a + b) \cdot \mathbf{x} = (a \cdot \mathbf{x}) + (b \cdot \mathbf{x})).$$

Vektorové prostory II

Skaláry značíme "obyčejnými" malými latinskými písmeny a vektory tučnými malými latinskými písmeny.

Poznámka. I když sčítání skalárů v (číselném) tělese K a sčítání vektorů značíme stejným znakem $+$, jde o různé operace.

Podobně násobení v (číselném) tělese a násobení vektoru skalárem jsou různé operace, ačkoliv obě značíme $\cdot$.

Později budeme stejně značit příslušné operace a nuly v různých vektorových prostorech.

Vektorové prostory III

Z formálního hlediska připomínají axiómy vektorového prostoru vlastnosti (číselného) tělesa K:

sčítání vektorů je opět asociativní a komutativní binární operace na V s neutrálním prvkem $\mathbf{0} \in V$,

operace násobení vektoru skalárem splňuje jakousi podmínku "asociativity", $1 \in K$ je její "neutrální prvek"

a platí dva "distributivní zákony".

Jeden podstatný rozdíl – násobení v (číselném) tělese K je binární operací na množině K, t. j. zobrazením $\cdot : K \times K \to K$, násobení ve vektorovém prostoru V nad číselným tělesem K není binární operace na V, ale binární operace $\cdot : K \times V \to V$.

Vektorové prostory IV

To nám však nebrání zavést obdobné dohody jako pro operace v (číselném) tělese: násobení má přednost před sčítáním a znak násobení budeme většinou vynechávat, t. j. budeme např. psát $a\mathbf{x} + \mathbf{y}$ namísto $(a \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{y}$.

Rovněž budeme vynechávat závorky, jejichž umístění neovlivní výslednou hodnotu výrazů jako např. v $ab\mathbf{x}$ nebo $a_1\mathbf{x}_1 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n$.

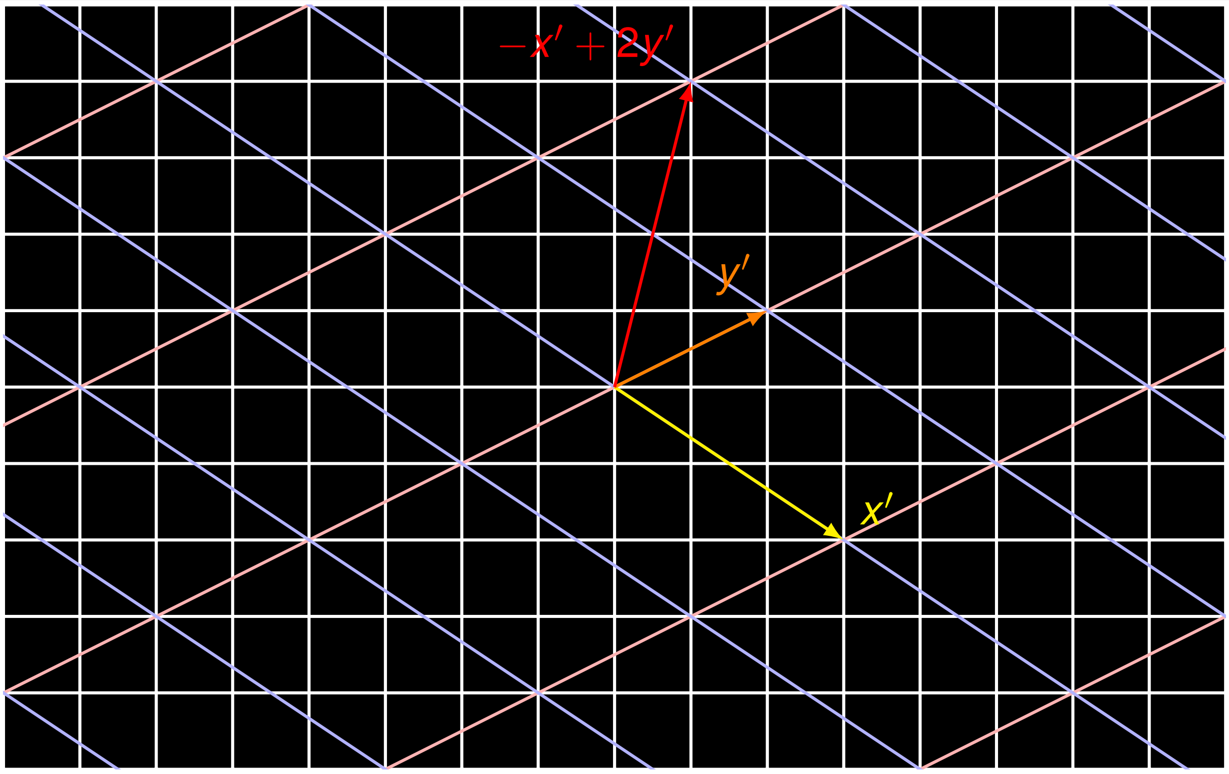
Poslední výraz budeme taktéž značit

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{x}_i$$

a nazývat ***lineární kombinací*** vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ s koeficienty $a_1, \ldots, a_n$.

Speciálně pro $n = 1$ to znamená $\sum_{i=1}^{1} a_i\mathbf{x}_i = a_1\mathbf{x}_1$; kvůli úplnosti pro $n = 0$ ještě klademe prázdnou lineární kombinaci $\sum_{i=1}^{0} a_i\mathbf{x}_i$ rovnou $\mathbf{0}$.

Vektorové prostory V



Vektorové prostory VI

Tvrzení 3.1

Nechť V je vektorový prostor nad (číselným) tělesem K. Pak pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $a, b, a_1, \dots, a_n \in K$ a $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in V$ platí

(a) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{z}$,

(b) $(a\mathbf{x} = a\mathbf{y} \& \ a \neq 0) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$,
$(a\mathbf{x} = b\mathbf{x} \& \ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \Rightarrow a = b$,

(c) $a\mathbf{0} = \mathbf{0} = 0\mathbf{x}$,

(d) $a\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow (a = 0 \vee \mathbf{x} = \mathbf{0})$,

(e) $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$,

(f) $a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = a\mathbf{x} - a\mathbf{y}$, $(a - b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} - b\mathbf{x}$,

(g) $a(\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_n) = a\mathbf{x}_1 + \dots + a\mathbf{x}_n$,
$(a_1 + \dots + a_n)\mathbf{x} = a_1\mathbf{x} + \dots + a_n\mathbf{x}$.

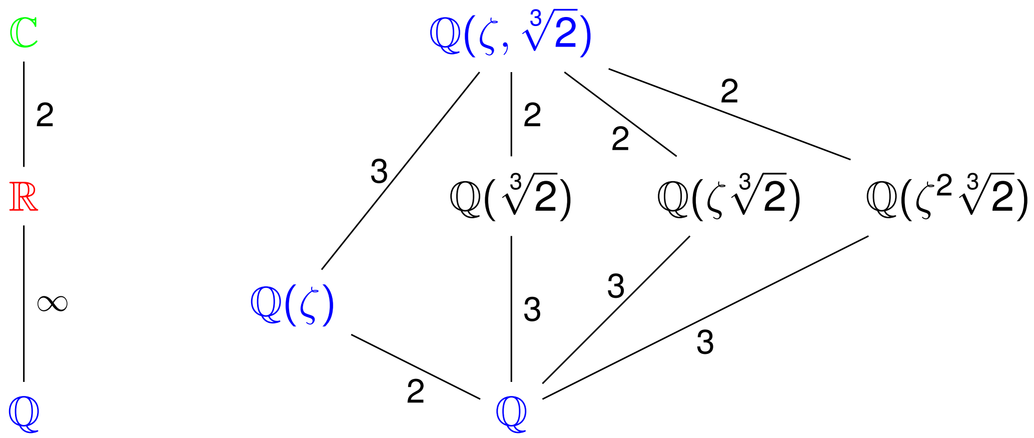
Příklady I - Rozšíření těles

Zřejmě každé těleso K můžeme považovat za vektorový prostor nad sebou samým.

Obecněji, pokud těleso L je rozšířením tělesa K, tak L můžeme považovat za vektorový prostor nad tělesem K (formálne stačí "zapomenout" na násobení některých dvojic prvků $a, b \in L$ a součin ab připustit jen pro $a \in K$, $b \in L$).

Podobným způsobem můžeme vektorový prostor V nad tělesem L zúžením násobení $L \times V \to V$ na násobení $K \times V \to V$ změnit na vektorový prostor nad tělesem K.

Příklady I - Rozšíření těles



Příklady II - **n**-rozměrné řádkové a sloupcové vektory nad daným tělesem

Pro libovolné těleso K a $n \in \mathbb{N}$ je množina

$$K^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in K\}$$

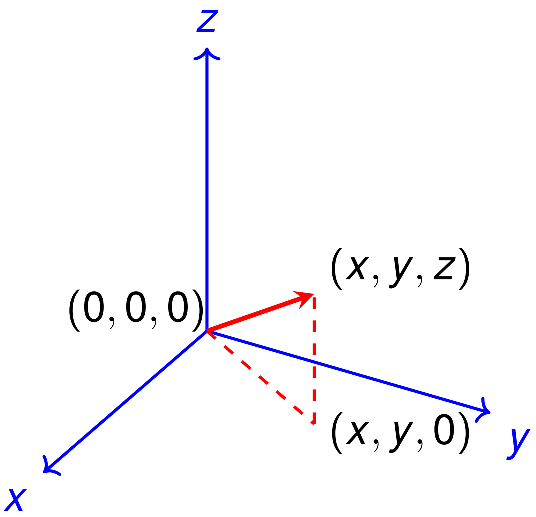
všech uspořádaných n-tic prvků z K spolu s operacemi

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$c\mathbf{x} = c(x_1, \dots, x_n) = (cx_1, \dots, cx_n),$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in K^n$ a $c \in K$, vektorový prostor nad tělesem K.

Příklady II - **n**-rozměrné řádkové a sloupcové vektory nad daným tělesem



Příklady II - **n**-rozměrné řádkové a sloupcové vektory nad daným tělesem

Zřejmě uspořádaná n-tice $\mathbf{0}_n = (0, \ldots, 0)$ hraje úlohu nuly v K^n. Pokud bude potřebné rozlišit nulové vektory v prostorech K^n pro různá přirozená čísla n, budeme pro nulu v K^n používat označení $\mathbf{0}_n$. Opačný prvek k $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ je zřejmě

$$-\mathbf{x} = -(x_1, \ldots, x_n) = (-x_1, \ldots, -x_n).$$

Říkáme, že operace na K^n jsou definované ***po složkách***. Prvky tohoto vektorového prostoru nazýváme ***n-rozměrné řádkové vektory*** nad tělesem K.

Vektorový prostor K^0 sestává z jediného prvku $\emptyset$, představujícího "uspořádanou nultici", která je nutně nulou v K^0.

Příklady II - n-rozměrné řádkové a sloupcové vektory nad daným tělesem

Někdy bude výhodnější pracovat s ***n-rozměrnými sloupcovými vektory*** nad tělesem K, t. j. s vektory tvaru

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{kde } x_1, \ldots, x_n \in K.$$

Píšeme rovněž K^n.

Příklady III - Polynomy nad daným tělesem

Polynomem nebo též ***mnohočlenem*** f *stupně* n, kde $-1 \leq n \in \mathbb{Z}$, v proměnné x nad tělesem K rozumíme formální výraz tvaru

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \end{aligned}$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in$ jsou skaláry, nazývané *koeficienty* polynomu f, a $a_n \neq 0$.

Nulu $0 \in K$ považujeme za polynom stupně -1 a nenulové skaláry $a \in K$ za polynomy stupně 0.

Zřejmě každý polynom f definuje (stejně označovanou) funkci $f : K \to K$ danou předpisem $c \mapsto f(c)$, t. j. dosazením konkrétních hodnot $c \in K$ za proměnnou x do polynomu f.

Příklady III - Polynomy nad daným tělesem

Množinu všech polynomů v proměnné x nad K *stupně nejvýše* n, kde $-1 \leq n \in \mathbb{Z}$, budeme značit $K^{(n)}[x]$; množinu *všech polynomů* v proměnné x nad K značíme $K[x]$.

Libovolný polynom $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \in K[x]$ stupně $m < n$ můžeme psát ve tvaru

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m + 0x^{m+1} + \ldots + 0x^n,$$

t. j. v tvaru $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, kde $b_i = 0$ pro $m < i \leq n$.

S použitím této konvence lze definovat součet $f + g$ polynomů $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ z $K[x]$ předpisem

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i + b_i)x^i.$$

Abstrakt Motivace | Tělesa Vektorové prostory | Matice nad vektory Lineární zobrazení | Vektorové prostory | Příklady

Příklady III - Polynomy nad daným tělesem

Pokud navíc $c \in K$, klademe

$$(cf)(x) = cf(x) = \sum_{i=0}^{n} ca_i x^i.$$

Snadno ověříme, že s takto po složkách definovanými operacemi součtu a skalárního násobku tvoří každá z množin polynomů $K^{(n)}[x]$, kde $-1 \leq n \in \mathbb{Z}$, a zároveň i množina všech polynomů $K[x]$ vektorový prostor nad tělesem K.

Příklady IV - Matice nad daným tělesem

Matice pevného typu $m \times n$ nad tělesem K s operacemi součtu a skalárního násobku tvoří ***vektorový prostor*** nad tělesem K tj. $K^{m \times n}$ bude dále označovat příslušný vektorový prostor.

Příklady V - Zobrazení množiny X do tělesa K

Označme $K^X = \{f \mid f\colon X \to K\}$. Definujme ***součet funkcí*** $f, g \in K^X$ jakožto funkci $f + g$, kde

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

pro všechna $x \in X$. Pro skalár $a \in K$ a funkc $f \in K^X$ definujeme ***skalární násobek*** a s f jakožto funkci $a \cdot f$, kde

$$(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$$

pro všechna $x \in X$.

K^X je vektorový prostor. Přitom

- Nulový vektor je nulová funkce $\mathbf{0}$, tj. $\mathbf{0}(x) = 0$ pro všechna $x \in X$.
- Opačný prvek k funkci $f \in K^X$ je zřejmě funkce $-f$, kde

$$(-f)(x) = -(f(x))$$

pro všechna $x \in X$.

Příklady V - Zobrazení množiny X do tělesa K

- Zvolme $X = [0, 1]$ a $K = \mathbb{R}$. Pak $\mathbb{R}^{[0,1]}$ je množina všech reálných funkcí na intervalu $[0, 1]$.
- $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ a $K = \mathbb{R}$. Potom $\mathbb{R}^{\{1,2,3,\ldots,n\}}$ je množina všech funkcí z $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ do $\mathbb{R}$. To ale není nic jiného, než n-tice reálných čísel $(f(1), \ldots, f(n))$ z Příkladu II.

Obsah

Ztotožnění matic

Matice typu $m \times n$ nad tělesem K jsou speciálním druhem blokových matic.

Matici $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ můžeme považovat jednak za blokovou matici s bloky a_{ij} typu 1×1, jednak se na ni můžeme dívat jako na řádek jejich sloupců resp. jako na sloupec jejích řádků.

$\mathbf{A}$ pak chápeme jako matici typu $m \times 1$ nad vektorovým prostorem $K^{1\times n}$, resp. jako matici typu $1 \times n$ nad vektorovým prostorom $K^{m\times 1}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1(\mathbf{A}), & \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), & \ldots, & \mathbf{s}_n(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \mathbf{r}_2(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix}$$

Vektorový prostor $V^{m\times n}$ I

Pro libovolné $m, n \in \mathbb{N}$ a libovolný (abstraktní) vektorový prostor V nad tělesem K máme definovanou množinu $V^{m\times n}$ všech matic nad množinou V.

Na množině $V^{m\times n}$ můžeme zavést operace součtu a skalárního násobku po složkách.

$V^{m\times n}$ s těmito operacemi tvoří vektorový prostor nad tělesem K.

Zobecníme nyní operaci skalárního násobku $K \times V \to V$ na operaci součinu mezi maticemi vhodných typů nad K a nad V.

Vektorový prostor $V^{m\times n}$ II

Pro matice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_{jk}) \in V^{n\times p}$ klademe $\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{v}_{ik}) \in V^{m\times p}$, kde

$$\mathbf{v}_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{u}_{jk} \,.$$

Tedy součin $\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\alpha}$ definujeme z formálního hlediska stejně jako součin matic nad tělesem K, jen s tím rozdílem, že operace součtu v K je nahrazená operací součtu ve V a operace součinu v K je nahrazená operací skalárního násobku $K\times V\to V$.

Pro násobení matic nad V maticemi nad K platí distributivita (z obou stran) vzhledem ke sčítání, zaměnitelnost s operací skalárního násobku, asociativita a postavení jednotkových matic jako neutrálních prvků (zleva).

Vektorový prostor $V^{m\times n}$ III

To znamená, že pro všechna $l, m, n, p \in \mathbb{N}$, $c \in K$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{C} \in K^{l\times m}$ $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \in V^{n\times p}$ platí:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) &= \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\beta},\\
(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\alpha},\\
\mathbf{A}\cdot(c\boldsymbol{\alpha}) &= c(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\alpha}) = (c\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{\alpha},\\
\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\alpha}) &= (\mathbf{C}\cdot\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{\alpha},\\
\mathbf{I}_n\cdot\boldsymbol{\alpha} &= \boldsymbol{\alpha}.
\end{aligned}$$

Dle úmluvy, že $\mathbf{x}c = c\mathbf{x}$ pro $c \in K$, $\mathbf{x} \in V$, lze definovat i součin matic $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_{ij}) \in V^{m\times n}$, $\mathbf{B} = (b_{jk}) \in K^{n\times p}$ v obráceném pořadí jako matici $\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{B} = (\mathbf{w}_{ik}) \in V^{m\times p}$ takovou, že

$$\mathbf{w}_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{v}_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\mathbf{v}_{ij} \,.$$

Vektorový prostor $V^{m \times n}$ IV

S využitím poslední definice můžeme pro $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\boldsymbol{\alpha} \in V^{n \times p}$, $\boldsymbol{\beta} \in V^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$ dokázat rovnosti

$$(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\alpha})^T = \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \mathbf{A}^T, \qquad (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\beta}^T.$$

Tedy i pro násobení matic nad K maticemi nad V platí distributivita (z obou stran) vzhledem ke sčítání, zaměnitelnost s operací skalárního násobku, asociativita a postavení jednotkových matic jako neutrálních prvků (nyní zprava).

Vektorový prostor $V^{m \times n}$ V

To znamená, že pro všechna $m, n, p, q \in \mathbb{N}$, $c \in K$, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in V^{n \times p}$, $\mathbf{C} \in K^{p \times q}$ platí:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{A} &= \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}, \\
\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{B}, \\
\boldsymbol{\alpha} \cdot (c\mathbf{A}) = c(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}) &= (c\boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{A}, \\
\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) &= (\boldsymbol{\alpha} \cdot A) \cdot \mathbf{C}, \\
\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{I}_n &= \boldsymbol{\alpha}.
\end{aligned}$$

Vztahy pro řádky a sloupce součinu zůstávají zachované pro oba typu součinů matic nad K a V, tj.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_i(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\alpha}) &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\alpha}, & \mathbf{s}_k(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\alpha}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_k(\boldsymbol{\alpha}) \\
\mathbf{r}_i(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{r}_i(\boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{B}, & \mathbf{s}_k(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) &= \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{B})
\end{aligned}$$

pre všechny $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\boldsymbol{\alpha} \in V^{n \times p}$, $\boldsymbol{\beta} \in V^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$.

Blokový tvar a násobení matic I

Definice součinů $\mathbf{A}\cdot\alpha$, $\beta\cdot\mathbf{B}$ jsou ve shodě s původním násobením matic.

Chápeme-li matici $\mathbf{A}\in K^{m\times n}$ jakožto řádek, tj. jakožto matici typu $1\times n$ nad prostorem sloupcových vektorů K^m, tak pro $\mathbf{B}\in K^{n\times p}$ splývá matice $(\mathbf{s}_1(\mathbf{A}),\dots,\mathbf{s}_n(\mathbf{A}))\cdot\mathbf{B}$ vypočítaná podle "nové" definice s blokovým tvarem $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{s}_1(\mathbf{B}),\dots,\mathbf{A}\cdot\mathbf{s}_p(\mathbf{B}))$ matice $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$.

Podobně, chápeme-li $\mathbf{B}$ jako sloupec, tj. jako matici typu $n\times 1$ nad prostorem řádkových vektorů K^p, tak

$$\mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1(\mathbf{B})\\ \vdots\\ \mathbf{r}_n(\mathbf{B})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1(\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}\\ \vdots\\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}\end{pmatrix}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}.$$

Abstrakt Motivace | Tělesa Vektorové prostory | Matice nad vektory Lineární zobrazení | Ztotožnění matic Prostor $V^{m\times n}$ | Blokový tvar

Blokový tvar a násobení matic II

Speciálně, lineární kombinaci $a_1\mathbf{x}_1+\dots a_n\mathbf{x}_n$ vektorů $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n\in V$ s koeficienty $a_1,\dots,a_n\in K$ můžeme s využitím vektorových matic zapsat ve tvaru součinů

$$(a_1,\dots,a_n)\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\\ \vdots\\ \mathbf{x}_n\end{pmatrix}=(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n)\cdot\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}.$$

Obsah

Abstrakt
Motivace
Tělesa
Vektorové prostory
Matice nad vektory
Lineární zobrazení
Definice
Příklady
Vlastnosti

Definice lineárního zobrazení I

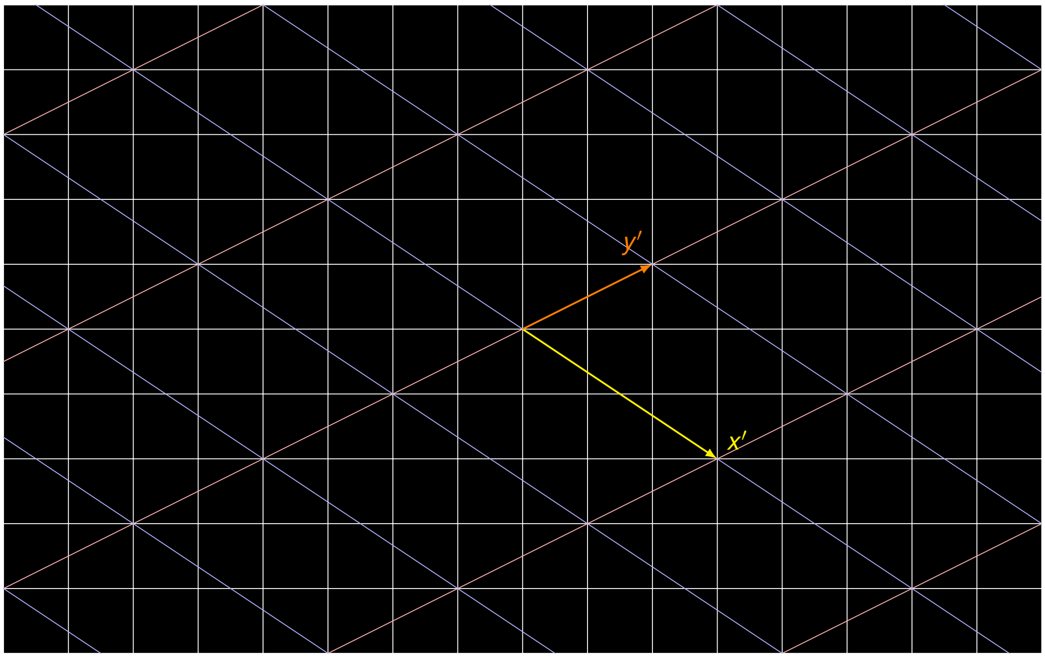
Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K.

Říkáme, že $\varphi\colon V \to U$ je ***lineární zobrazení***, pokud φ zachovává operace vektorového součtu a skalárního násobku,

tj. pokud pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $c \in K$ platí

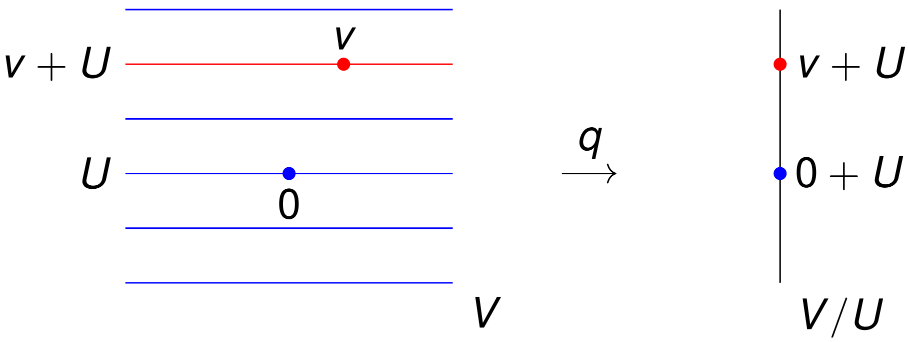
$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \varphi(\mathbf{x})+\varphi(\mathbf{y}), \\ \varphi(c\mathbf{x}) &= c\varphi(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Definice lineárního zobrazení II - příklad



$(1,0) \mapsto \mathbf{x}'$
$(0,1) \mapsto \mathbf{y}'$

Definice lineárního zobrazení III - příklad



Příklady I

Příklad 5.1

Nechť K je těleso. Distributivita součinu matic vzhledem k jejich součtu a jeho zaměnitelnosti s operací skalárního násobku říká,

že pro pevné $m, n, p \in \mathbb{N}$ a libovolnou matici $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$ je přiřazením $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ definované lineární zobrazení mezi vektorovými prostory matic $K^{n\times p} \to K^{m\times p}$.

Podobně je přiřazením $\mathbf{Y} \mapsto \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}$ definované lineární zobrazení $K^{p\times m} \to K^{p\times n}$.

Speciálně pro $p = 1$ je takto definované lineární zobrazení $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ mezi sloupcovými vektorovými prostory $K^n \to K^m$, resp. lineární zobrazení $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{y} \cdot \mathbf{A}$ mezi řádkovými vektorovými prostory $K^m \to K^n$.

Každé lineární zobrazení mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad K má „v podstatě takovýto tvar.

Příklady II

Příklad 5.2

Nechť K je těleso.

Pro $m, n \in \mathbb{N}$ a pevné $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ jsou předpisy

$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{r}_i(\mathbf{A})$, $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{s}_j(\mathbf{A})$ definovaná lineární zobrazení $K^{m\times n} \to K^{1\times n}$ resp. $K^{m\times n} \to K^{m\times 1}$.

Rovněž $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}^T$ je lineární zobrazení $K^{m\times n} \to K^{n\times m}$.

Příklady III

Příklad 5.3

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K, X je množina a $x \in X$ je pevně zvolený prvek.

Připomeňme, že V^X je vektorový prostor všech funkcí $f : X \to V$. Dosazení prvku x do funkce f, tj. přiřazení $f \mapsto f(x)$, je lineární zobrazení $V^X \to V$.

Podobně, pro libovolnou podmnožinu $Y \subseteq X$ je zúžení $f \mapsto f \restriction Y$ lineární zobrazení $V^X \to V^Y$.

Příklady IV

Příklad 5.4

Označme V množinu všech konvergentních posloupností reálných čísel.

Zřejmě V je lineární podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ všech posloupností reálných čísel.

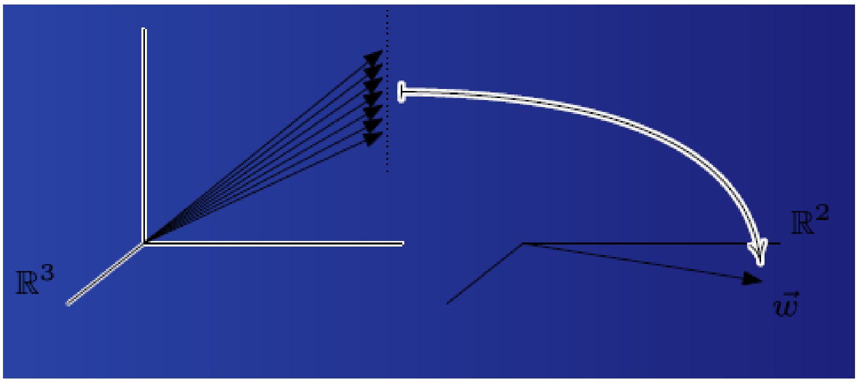
Pak zobrazení $V \to \mathbb{R}$, které posloupnosti $\mathbf{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty} \in V$ přiřadí její limitu $\lim_{n\to\infty} a_n$, je lineární.

Příklady V

Příklad 5.5

Uvažujme projekci $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tvaru* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Tato projekce je lineární zobrazení, které není prosté a je surjektivní. Totiž vzor nějakého vektoru v $\mathbb{R}^2$ *je vertikální přímka vektorů z* $\mathbb{R}^3$.



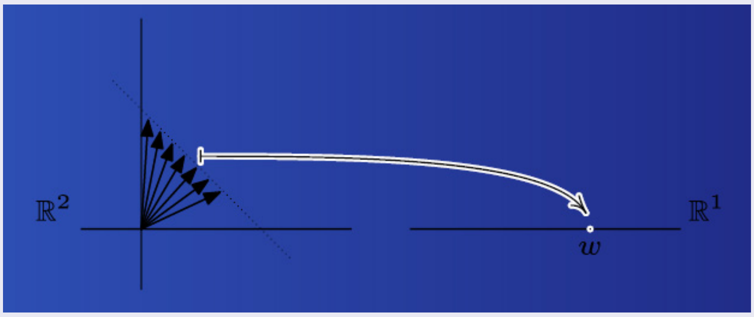
Příklady VI

Příklad 5.6

Následující lineární zobrazení $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ *dané předpisem*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{h} x + y$$

není rovněž prosté. Pro pevné $w \in \mathbb{R}^1$ *je totiž jeho vzor* $h^{-1}(w)$ *množina všech vektorů v rovině,*



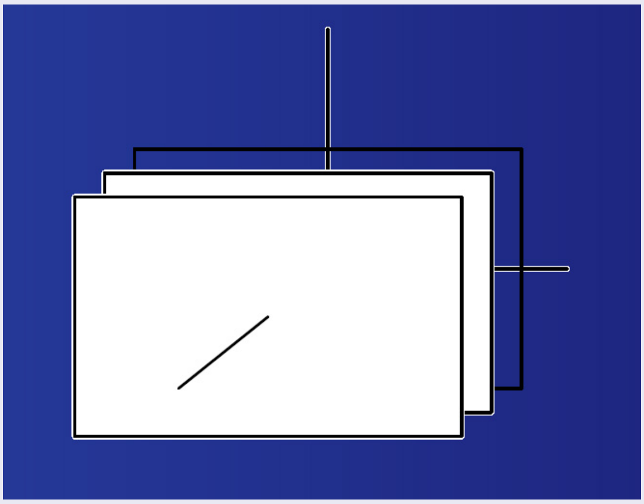
jejichž souřadnice po sečtení dávají právě w.

Příklady VII

Příklad 5.7

Vzory mohou samozřejmě být jiné struktury než výše použité přímky. Pro lineární zobrazení $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix},$$



jsou příslušné vzory roviny $x = 0$, $x = 1$, atd., kolmé k ose x.

Vlastnosti lineárního zobrazení I

Lineární zobrazení zachovávají nulový vektor a opačné vektory, tj. pro lineární zobrazení $\varphi\colon V \to U$ a $\mathbf{x} \in V$ platí

$$\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \qquad \varphi(-\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x}).$$

Pro každý vektorový prostor V je identické zobrazení $\mathrm{id}_V\colon V \to V$, $x \mapsto x$ lineární.

Pro libovolné vektorové prostory U, V nad tělesem K zobrazení $\mathbf{0}\colon V \to U$, které každému vektoru $\mathbf{x} \in V$ přiřadí nulový vektor $\mathbf{0} \in U$, je lineární.

Komutativita operace součinu v tělese a jeho distributivita vzhledem na sčítaní znamená, že pro libovolný pevný skalár $a \in K$ je přiřazením $x \mapsto ax$ definované lineární zobrazení $K \to K$.

Vlastnosti lineárního zobrazení II

Lineární zobrazení můžeme charakterizovat jako zobrazení mezi vektorovými prostory (nad tím stejným tělesem), které zachovávají lineární kombinace.

Tvrzení 5.8

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\varphi\colon V \to U$ je libovolné zobrazení. Nasledující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) *φ je lineární zobrazení;*

(ii) *pre všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $a, b \in K$ platí*

$$\varphi(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\varphi(\mathbf{x}) + b\varphi(\mathbf{y});$$

(iii) *pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a všechna $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$, $c_1, \ldots, c_n \in K$ platí*

$$\varphi(c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n) = c_1\varphi(\mathbf{x}_1) + \ldots + c_n\varphi(\mathbf{x}_n).$$