3. cvičení z M1110, podzim 2020

Příklad. 1. Zjistěte, zda jde matice násobit , a pokud ano, vynásobte je.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -5 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}}_{\text{nelze}}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -5 \\ 9 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 3\overset{4}{\begin{pmatrix} -10 & 18 & 12 & 54 \\ 7 & -10 & -6 & -32 \\ 5 & 56 & 54 & 118 \end{pmatrix}}$$

.

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 21 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 21 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 16 & 6 & 42 & 10 \\ -2 & -8 & -3 & -21 & -5 \\ 18 & 72 & 27 & 189 & 45 \\ -12 & -48 & -18 & -126 & -30 \\ 6 & 24 & 9 & 63 & 15 \end{pmatrix}$$

$\|$

$$23 - 126 + 15 = -88$$

Příklad. 2. Napište nějaké matice tvaru 5×4 a 4×3 a vynásobte je.

5×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 5 \\ -4 & 2 & 4 \\ -3 & -3 & -2 \\ 10 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Příklad. 3. Nechť $A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vypočtěte $A^2 = A \cdot A$ a $A^3 = A \cdot A \cdot A$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & xz \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & xz \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

čtvercové matice $n \times n$ $\exists k$ $A^k = 0$ nilpotentní

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & 0 & \\ 0 & & \ddots \; 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{A^n = 0}$$

Příklad. 4. Vynásobte následující dvě matice a výsledek vyčíslete s použitím součtových vzorců pro goniometrické funkce

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\cos\beta \\ r\sin\beta \end{pmatrix}.$$

Na základě toho ukažte, že zobrazení

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

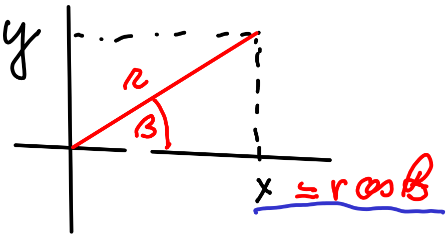
je otočení kolem počátku v rovině o úhel α. proti směru hod. ručiček.

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\cos\beta \\ r\sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha\cos\beta - r\sin\alpha\sin\beta \\ r\sin\alpha\cos\beta + r\cos\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

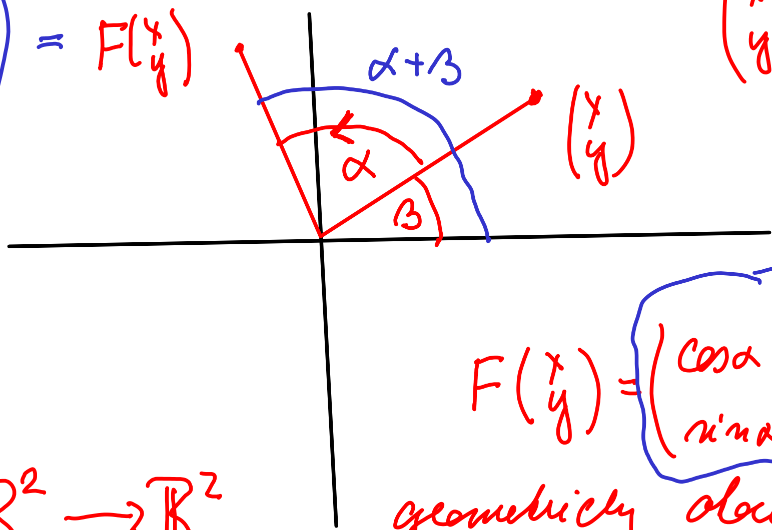
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\beta \\ r\sin\beta \end{pmatrix} \quad !$$

$r\sin\beta = y$



$$\begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\beta) \\ r\sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\beta) \\ r\cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$



matice otočení o úhel α

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

geometricky otočení o úhel α proti směru hod. ručiček (kladný směr)

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cdot x - \sin\alpha\cdot y \\ \sin\alpha\cdot x + \cos\alpha\cdot y \end{pmatrix}$$

$[x, y] \longmapsto [\cos\alpha\cdot x - \sin\alpha\cdot y,\ \sin\alpha\cdot x + \cos\alpha\cdot y]$ je otočení

Příklad. 5. Vypočtěte B^n, jestliže $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$B^n = \underbrace{B \cdot B \cdot \ldots \cdot B}_{n\times} = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 3n(n-1) \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dokážeme indukcí:

Pro všechna $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ platí

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 3n(n-1) \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nejdříve tvrzení dokážeme pro $n = 1$ $\qquad \| \quad n = 1$

$$B^1 = B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 1 & 3\cdot 1\cdot 0 \\ 0 & 1 & 3\cdot 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Indukční krok:

Předpokládáme, že tvrzení platí pro $n-1$ a dokážeme ho pro n, $n \geq 2$.

Jestliže $B^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2(n-1) & 3(n-1)(n-2) \\ 0 & 1 & 3(n-1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

pak $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 3n(n-1) \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$B^n = B^{n-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2(n-1) & 3(n-1)(n-2) \\ 0 & 1 & 3(n-1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{array}{ccc} 1 & \overset{2n}{2+2(n-1)} & 2(n-1)\cdot 3 + 3(n-1)(n-2)\cdot 1 \\ 0 & 1 & 0\cdot 0 + 1\cdot 3 + 3(n-1)\cdot 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ 3n \\ \\ \end{array}$$

$$2(n-1)\cdot 3 + 3(n-1)(n-2)\cdot 1 = 6(n-1) + 3(n-1)(n-2) =$$

$$= 3(n-1)\{2 + n - 2\} = 3n(n-1)$$

$$B^n = B^{n-1}\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 3n(n-1) \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – co je naše tvrzení

Tím je důkaz ukončen, $1, 2, 3, \ldots$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Návod: Dokažte indukcí, že $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 3n(n-1) \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Příklad. 6. Vypočtěte $C^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n$.

Návod: Spočtěte si C^2, C^3 a C^4. Pomocí toho si udělejte hypotézu, čemu se rovná C^n, a tu dokažte indukcí.

C^2, C^3, C^4 uhodli, čemu se bude rovnat C^n 15:04

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 26 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

3, 7, 15,
8 26 80

$$C^4 = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 80 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} \qquad C^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n-1 & 3^n-1 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

Tvrzení

Dokažme indukcí

$$C^1 = C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^1-1 & 3^1-1 \\ 0 & 2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^1 \end{pmatrix}$$

Pro $n=1$ tvrzení platí

Nechť

$$C^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n-1}-1 & 3^{n-1}-1 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$C^n = C^{n-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n-1}-1 & 3^{n-1}-1 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$=$

$$\begin{pmatrix} 1 & \overset{1+2^n-2}{1+2(2^{n-1}-1)} & \overset{2+3^n-3}{2+3(3^{n-1}-1)} \\ 0 & 2^{n-1}\cdot 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n-1}\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n-1 & 3^n-1 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

Tím dokázali naše tvrzení i pro n.

Příklad. 7. Pro všechny elementární řádková operace op na maticích o k řádcích platí

$$\operatorname{op}(E_k) \cdot A = \operatorname{op}(A),$$

kde symbol $\operatorname{op}(A)$ znamená provedení operace na matici A tvaru $k \times n$ a E_k je jednotková matice tvaru $k \times k$. Ukažte pro konkrétní matice A.

Vyměníme 1. a 3. řádek

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

2. řádek vynásobíme c

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} =$$

Příklad. 8. Matice A a B tvaru $n \times n$ jsou dány předpisem:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \geq j, \\ 2, & \text{if } i < j, \end{cases} \qquad B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \leq j, \\ 3, & \text{if } i > j. \end{cases}$$

Vypočtěte, čemu se rovná jejich součin.

Návod: Napište si tyto matice například pro $n = 6$. Zkuste si provést jejich násobení. Pro obecné n spočtěte $(A \cdot B)_{ij}$ zvlášť pro $i \leq j$ a pro $i \geq j$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & 2 \\ \cdots & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & & & & & \\ 3 & 3 & 3 & 3 & & 1 \end{pmatrix}$$

$n \times n$ $\qquad$ $n \times n$ $\qquad$ n,n

$$(AB)_{23} = \overbrace{\underbrace{1\cdot 1 + 1\cdot 1}_{} + \underbrace{2\cdot 1}_{}}^{3} + \underbrace{2\cdot 3 + 2\cdot 3 + \ldots + 2\cdot 3}_{n-3}$$

$$= 2 + 2 + 6(n-3) = 6n - 18 + 4 = 6n - 14$$

$1 \leq i \leq j \leq n$

$$(A\cdot B)_{ij} = \underbrace{\overbrace{1\cdot 1 \quad 1\cdot 1 \quad \ldots 1\cdot 1}^{i} + \overbrace{2\cdot 1 + \ldots + 2\cdot 1}^{j-i}}_{j} + \underbrace{2\cdot 3 + 2\cdot 3 + \ldots 2\cdot 3}_{n-j}$$

$$= 1\cdot 1\cdot i + 2\cdot 1\,(j-i) + 2\cdot 3\,(n-j)$$

$$= i + 2(j-i) + 6n - 6j = \underline{\underline{6n - i - 4j}} \checkmark$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \\ - & - & - & - & - & - \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & \dots & 1 \\ - & - & - & - & - & \cdot \\ 3 & 3 & 3 & 3 & & 31 \end{pmatrix}$$

$i=3$

$j=2$

$i \geq j$

$$(AB)_{32} = \underbrace{\overbrace{1\cdot 1 + 1\cdot 1}^{2\times} + 1\,3}_{3\times} + \underbrace{2\,3 \quad 2\,3 \quad \dots \quad 2\,3}_{(n-3)\times}$$

$$(AB)_{i,j} = \underbrace{\overbrace{1\cdot 1 \quad 1\cdot 1 \dots 1\cdot 1}^{j \text{ krát}} + \overbrace{1\cdot 3 + \dots 1\cdot 3}^{i-j \text{ krát}}}_{i \text{ krát}} + \underbrace{2\cdot 3 + 2\cdot 3 + \dots 2\cdot 3}_{n-i \text{ krát}}$$

$$= 1\cdot 1\, j + 1\cdot 3\,(i-j) + 2\cdot 3\,(n-i) = \quad i \geq j$$

$$= j + 3(i-j) + 6(n-i) = \underline{6n - 3i - 2j} \quad ✓$$

$\underline{i \leq j}$: $6n - i - 4j$

$\underline{i \geq j}$: $6n - 3i - 2j$

$(AB)_{kk}$

$i=j$ $\quad \underline{6n - 5i} \quad = \quad \underline{6n - 5i}$