4. cvičení z M1110, podzim 2021

Aby studenti mohli snadno řešit 2. domácí úlohu, je potřeba minimálně udělat příklady 2, 3(a) včetně nalezení generátorů a příklady 4(a),(b).

Příklad. 1. Ukažte, že následující množiny lze opatřit vhodnou operací sčítání a násobení skalárem tak, aby se s těmito operacemi staly vektorovými prostory nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

(a) Množina $\mathbb{R}[x]$ všech polynomů s reálnými koeficienty.
(b) Množina $\mathbb{C}[x]$ všech polynomů s komplexními koeficienty.
(c) Množina $\mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{R})$ matic tvaru $k \times n$ s reálnými čísly.
(d) Množina $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ všech posloupností reálných čísel.
(e) Množina $\{f : M \to \mathbb{C}\}$ všech zobrazení nějaké neprázdné množiny M do komplexních čísel.

Příklad. 2. Ukažte, že množina $U = \mathbb{R}^3$ s operacemi

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3), \quad a \odot (x_2, x_2, x_3) = (ax_1, x_2, x_3)$$

není vektorový prostor. Zjistěte, které axiomy vektorového prostoru jsou splněny a které nikoliv.

Příklad. 3. Rozhodněte, zda následující podmnožiny vektorových prostorů s operacemi stejnými jako na vektorovém prostoru jsou vektorové podprostory.

(a) $U = \{f \in \mathbb{R}_3[x] |\, f(3) = 0,\ f(-1) = 0\} \subset \mathbb{R}_3[x]$,
(b) $V = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) |\, a_{11} + a_{22} = 1\} \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,
(c) $Z = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} |\, f(n+1) = f(n) + f(n-1)\} \subset \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$.

Pokud zjistíte, že jde o vektorový podprostor, najděte v něm konečnou množinu vektorů takovou, že všechny že všechny další vektory podprostoru jsou jejich lineární kombinací. Takové vektory se nazývají generátory vektorového podprostoru.

Příklad. 4. Rozhodněte, zda následující podmnožiny vektorového podprostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ všech funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ jsou vektorové podprostory.

(a) $U = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} |\, \forall x \in \mathbb{R} :\ f(|x|) = 0\}$,
(b) $V = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} |\, \forall c \in \mathbb{Z} :\ f(c) \cdot f(-c) = 0\}$,
(c) $W = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} |\, \forall s, t \in \mathbb{R} :\ s \le t \Rightarrow f(s) \ge f(t)\}$,
(d) $X = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} |\, \exists n \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{R} :\ |f(x)| \le n|x|\}$.

Příklad. 5. Uvažujme v $\mathbb{R}^5$ vektory $v_1 = (1, 2, 1, 0, 1)$, $v_2 = (2, -1, 0, 1, 1)$, $v_3 = (1, -3, -1, 1, 0)$ a $u = (1, 7, 3, -1, 2)$. Zjistěte, zda vektor u leží v lineárním obalu $[v_1, v_2, v_3]$.

Příklad. 6. V prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ zjistěte, zda polynom $1 + 3x + 5x^2 + 10x^3$ leží v lineárním obalu

$$[1 + x + 2x^2 - x^3, 1 + 2x + x^3, 1 + x + 3x^2 - x^3, 2 + 2x + 4x^2 + 5x^3].$$

Pokud ano, napište ho jako konkrétní lineární kombinaci daných polynomů.

Řešení. $(-10, 2, 7, 1)$ □