

6. cvičení z M1110, podzim 2021

Příklad 1. Zjistěte, zda jsou vektory $v_1 = (1, -1, 0, 2)$, $v_2 = (2, 2, -1, 3)$, $v_3 = (0, 1, 1, 0)$ a $v_4 = (3, 2, 0, 5)$ ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^4 lineárně závislé nebo nezávislé.

Příklad 2. Zjistěte, zda jsou polynomy $x^2 + x + 1$, $2x^2 + 2$, $x^2 - x$ ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ lineárně závislé nebo nezávislé.

Příklad 3. Zjistěte, zda jsou následující funkce ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ lineárně závislé nebo nezávislé:

- (1) $x^2, |x|, \sqrt{|x|}$,
- (2) $(\sqrt{x^2 + 1})^2, (\sqrt{x^2 - 1})^2, x^2 + 1$,
- (3) $\sin x, \cos x, \sin 2x$.

Příklad 4. S použitím algoritmu z přednášky vyberte z vektorů $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \in \mathbb{R}^4$ lineárně nezávislé se stejným lineárním obalem.

$$u_1 = (1, 2, 3, -1), u_2 = (-1, 3, 2, 4), u_3 = (1, 1, 4, -6), u_4 = (3, 5, 10, -8), u_5 = (1, 1, 1, 1).$$

Příklad 5. Najděte bázi podprostoru $M \subseteq \mathbb{R}^5$ všech řešení homogenní soustavy rovnic.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

a doplňte ji do báze celého prostoru \mathbb{R}^5 .

Příklad 6. Napište dvě různé báze vektorového prostoru $\text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ všech reálných matic tvaru 3×3 . Dále najděte báze podprostorů:

- (1) $U \subseteq \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ všech symetrických matic,
- (2) $V \subseteq \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ všech antisymetrických matic,
- (3) $W \subseteq \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ všech matic s nulovou stopou.

Příklad 7. Najděte báze podprostorů prostoru $\mathbb{R}_3[x]$:

- (1) $K = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(-x) = -p(x), p(1) = 0\}$,
- (2) $L = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(x) - 2xp'(x) = 0\}$, kde p' značí derivace polynomu p .

Příklad 8. Necht' U je vektorový prostor všech nekonečných posloupností reálných čísel. Ukažte, že jeho podprostor

$$F = \{(a_i)_{i=1}^{\infty} \in U : a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, n \geq 2\}$$

má bázi tvořenou dvěma vektory.

Dále se pokuste ukázat, že celý prostor nemá bázi tvořenou konečným seznamem vektorů.

Příklad 9. Dokažte z definice báze: Je-li u_1, u_2, u_3, u_4 báze prostoru U , pak $u_1 + u_4, u_3, u_2 + u_3 + u_4, u_1 + 2u_3$ je rovněž báze prostoru U .