

7. cvičení z M1110, podzim 2021

Příklad 8 se asi nestihne. Součtu a průniku bude věnována polovina dalšího cvičení.

Příklad 1. Napište dvě různé báze vektorového prostoru $\text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ všech reálných matic tvaru 3×3 . Dále najděte báze a dimenze podprostorů:

- (1) $U \subseteq \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ všech symetrických matic,
- (2) $V \subseteq \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ všech antisymetrických matic,
- (3) $W \subseteq \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ všech matic s nulovou stopou.

Příklad 2. Najděte báze a dimenze následujících vektorových prostorů:

- (1) $\mathbb{C}_2[x]$ jako vektorového prostoru nad \mathbb{R} ,
- (2) \mathbb{R}^M nad \mathbb{R} , kde M je konečná množina.

Příklad 3. Najděte báze podprostorů prostoru $\mathbb{R}_3[x]$:

- (1) $K = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(-x) = -p(x), p(1) = 0\}$,
- (2) $L = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(x) - 2xp'(x) = 0\}$, kde p' značí derivace polynomu p .

Příklad 4. Necht' U je vektorový prostor všech nekonečných posloupností reálných čísel. Ukažte, že jeho podprostor

$$F = \{(a_i)_{i=1}^{\infty} \in U : a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, n \geq 2\}$$

má bázi tvořenou dvěma vektory.

Příklad 5. Dokažte z definice báze: Je-li u_1, u_2, u_3, u_4 báze prostoru U , pak $u_1 + u_4, u_3, u_2 + u_3 + u_4, u_1 + 2u_3$ je rovněž báze prostoru U .

Příklad 6. Spočítejte souřadnice polynomu $1 + 3x + 5x^2 + 10x^3$ v bázi

$$\alpha = (1 + x + 2x^2 - x^3, 1 + 2x + x^3, 1 + x + 3x^2 - x^3, 2 + 2x + 4x^2 + 5x^3)$$

prostoru $\mathbb{R}_3[x]$.

Řešení. $(-10, 2, 7, 1)$ □

Příklad 7. Necht' $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ je báze prostoru U . Souřadnice vektoru $v \in U$ v této bázi jsou

$$(v)_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Najděte souřadnice vektoru v v bázi $\beta = (u_3, u_1 + 2u_2, u_1 - u_2 + 2u_3)$.

Příklad 8. Najděte báze a dimenze součtu a průniku podprostorů P a Q v \mathbb{R}^4 , jestliže

$$P = [(4, 0, -2, 6), (2, 1, -2, 3), (3, 1, -2, 4)],$$

$$Q = [(1, -1, 0, 2), (2, 2, -1, 3), (0, 1, 1, 0)].$$

Řešení. Průnik má dimenzi 2 a bázi např. $(1, -1, 0, 2), (-2, -1, 2, -3)$. □