8. cvičení z M1110, podzim 2021

Příklad. 1. Najděte báze a dimenze součtu a průniku podprostorů P a Q v $\mathbb{R}^4$, jestliže

$$P = [(4,0,-2,6),(2,1,-2,3),(3,1,-2,4)],$$
$$Q = [(1,-1,0,2),(2,2,-1,3),(0,1,1,0)].$$

Řešení. Průnik má dimenzi 2 a bázi např. $(1,-1,0,2),(-2,-1,2,-3)$. □

Příklad. 2. Najděte báze a dimenze součtu a průniku podprostorů K a L v $\mathbb{R}^4$, jestliže

$$K = [(1,2,0,3),(0,1,1,2),(2,0,1,1)],$$
$$L = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4;\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0\}.$$

Návod. Průnik najděte přímo, bez hledání báze podprostoru L. Součet najděte pomocí formulky pro dimenze. □

Příklad. 3. Najděte báze a dimenze podprostorů

$$P = \{f \in \mathbb{R}_4[x] |\ f(1) = 0,\ f(2) = 0\} \quad \text{a} \quad Q = \{g \in \mathbb{R}_4[x] |\ g(x) = g(-x)\}$$

a báze a dimenze jejich průniku a součtu.

Řešení. $\dim P = 3$, $\dim Q = 3$, $\dim P \cap Q = 1$, $\dim P + Q = 5$, tedy $P + Q = \mathbb{R}_4[x]$. □

Příklad. 4. Rozhodněte, zda následující zobrazení mezi vektorovými prostory jsou lineární.

(a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi(x_1,x_2) = 2x_1 + x_1x_2$,
(b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(x_1,x_2) = (2x_1 - 3x_2, 5x_2, x_1 - x_2)$,
(c) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(p) = (p(1), p(2)^2)$,
(d) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(p) = (p(1), p(2))$.

Příklad. 5. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujme bázi $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (1,1,1)$. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení, o němž víme, že

$$\varphi(u_1) = u_1,\ \varphi(u_2) = u_3,\ \varphi(u_3) = u_2.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 tak, aby v souřadnicích standardní báze bylo $\varphi(x) = Ax$.

Příklad. 6. Nechť φ je zobrazení $\mathbb{R}^3$ do sebe, které je symetrií podle roviny $x_1 - x_3 = 0$. Najděte matici B takovou, že v souřadnicích standardní báze je $\varphi(x) = Bx$.

Příklad. 7. Najděte bázi jádra a obrazu lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ zadaného předpisem

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 8x_4 \end{pmatrix}.$$