

10. cvičení z M1110, podzim 2021

Příklad 1. Necht' $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_4[x]$ je lineární zobrazení zadané předpisem

$$\varphi(p) = (x^2 + 1)p'(x),$$

kde p' je derivace polynomu p . Najděte matici $(\varphi)_{\beta, \alpha}$ zobrazení φ v bázích $\alpha = (1, x, x^2, x^3)$ prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ a $\beta = (x^4, x^3, x^2, x, 1)$ prostoru $\mathbb{R}_4[x]$. (Pozor na pořadí vektorů v bázi.)

Příklad 2. Necht' φ je zobrazení \mathbb{R}^3 do sebe, které je symetrií podle roviny $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$. Najděte matici $(\varphi)_{\alpha, \alpha} = A$ tohoto zobrazení v bázi α složené ze dvou vektorů ležících v dané rovině a třetího vektoru kolmého k rovině. Dále najděte matici $(\varphi)_{\varepsilon, \varepsilon} = B$ ve standardní bázi prostoru \mathbb{R}^3 .

Příklad 3. Najděte matici $(\varphi)_{\alpha, \alpha}$ lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadaného předpisem

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

v bázi $\alpha = ((1, 1, 2)^T, (1, 0, 1)^T, (1, 2, 2)^T)$.

Příklad 4. Najděte matici lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zadaného předpisem

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

v bázích $\alpha = ((1, 0, 1)^T, (1, 1, 2)^T, (1, -1, 2)^T)$ a $\beta = ((1, 2)^T, (2, 3)^T)$.

Příklad 5. Najděte matici $(\text{id})_{\beta, \alpha}$ identického zobrazení $\text{id} : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$, kde $\alpha = (x^2 + x + 1, x + 2, x^2 - x)$ a $\beta = (x^2 + 1, x^2 - x - 1, x + 1)$. Najděte rovněž matice $(\text{id})_{\alpha, \alpha}$ a $(\text{id})_{\beta, \beta}$.

Příklad 6. Necht' lineární zobrazení $\varphi : \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ má v bázích

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

a

$$\beta = (x^2 - 2x + 3, x + 2, 2x^2 - 1)$$

matici

$$(\varphi)_{\beta, \alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Najděte předpis

$$\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \dots$$