11. cvičení z M1110, podzim 2021

Příklad. 1. Spočtěte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Proveďte zkoušku.

Příklad. 2. Spočtěte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 & -2 \\ -1 & -6 & -11 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zkoušku proveďte aspoň částečně.

Řešení. Inverzní matice je

$$\begin{pmatrix} 154 & -179 & -205 & 235 \\ -36 & 42 & 48 & -55 \\ 6 & -7 & -8 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad. 3. Spočtěte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proveďte zkoušku.

Příklad. 4. Spočtěte inverzní matici k matici tvaru $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \dots & 1 & 1 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 2-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2-n \end{pmatrix}.$$

Návod. K 1. řádku přičtěte ostatní řádky. □

Příklad. 5. Najděte matici přechodu $(\mathrm{id})_{\beta,\alpha}$ mezi bázemi $\alpha = (x^2+x+1, x+2, x^2-x)$ a $\beta = (x^2+2, x^2-x-1, x+1)$ prostoru $\mathbb{R}_3[x]$.

Spočtěte ji prvně přímo z definice a potom pomocí matic přechodu $(\mathrm{id})_{\varepsilon,\alpha}$ a $(\mathrm{id})_{\varepsilon,\beta}$, kde $\varepsilon = (x^2, x, 1)$.

Uvědomte si na tomto příkladě, že s maticemi přechodu se počítá jinak s bázemi a jinak se souřadnicemi. S bázemi zapisovanými do řádku takto:

$$\alpha = \beta(\mathrm{id})_{\beta,\alpha},$$

ale se souřadnicemi vektorů takto:

$$(u)_\beta = (\mathrm{id})_{\beta,\alpha}(u)_\beta.$$

Napište analogické vztahy pro matice obecných lineárních zobrazení.

Příklad. 6. Na některém z předchozích cvičení jsme hledali matici lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadaného předpisem

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

v bázích $\alpha = ((1,0,1)^T, (1,1,2)^T, (1,-1,2)^T)$ a $\beta = ((1,2)^T, (2,3)^T)$. Tentokrát ji spočítejte pomocí "vzorečku" s maticemi přechodu, kde se vyskytují standardní báze $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$.

Příklad. 7. Najděte předpis pro složené zobrazení $\psi \circ \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$(\psi \circ \varphi) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

dvou lineárních zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadaných na vektorech bází takto:

$$\varphi(1,0,1) = (4,1),\ \varphi(1,1,2) = (9,1),\ \varphi(1,-1,2) = (5,3)$$
$$\psi(1,2) = (4,3,11),\ \psi(2,3) = (7,4,18).$$

Uměli byste bez počítání zjistit, zda je složené zobrazení lineární izomorfismus?

Řešení. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$ □