10. cvičení z M1110, podzim 2020

Příklad. 1. Najděte matici přechodu $(\mathrm{id})_{\beta,\alpha}$ mezi bázemi $\alpha = (x^2 + x + 1, x + 2, x^2 - x)$ a $\beta = (x^2 + 2, x^2 - x - 1, x + 1)$ prostoru $\mathbb{R}_3[x]$.

Spočtěte ji prvně přímo z definice a potom pomocí matic přechodu $(\mathrm{id})_{\varepsilon,\alpha}$ a $(\mathrm{id})_{\varepsilon,\beta}$, kde $\varepsilon = (x^2, x, 1)$.

Uvědomte si na tomto příkladě, že s maticemi přechodu se počítá jinak s bázemi a jinak se souřadnicemi. S bázemi zapisovanými do řádku takto:

$$\alpha = \beta(\mathrm{id})_{\beta,\alpha},$$

ale se souřadnicemi vektorů takto:

$$(u)_\beta = (\mathrm{id})_{\beta,\alpha}(u)_\beta.$$

Napište analogické vztahy pro matice obecných lineárních zobrazení.

$\mathbb{R}_2[x]$ $\quad \alpha = (\underset{p_1}{x^2+x+1}, \underset{p_2}{x+2}, \underset{p_3}{x^2-x})$ $\quad \beta = (\underset{q_1}{x^2+2}, \underset{q_2}{x^2-x-1}, \underset{q_3}{x+1})$

$(id)_{\beta,\alpha}$

$$(id)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} (p_1)_\beta & (p_2)_\beta & (p_3)_\beta \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

α

$$a_{11}(x^2+2) + a_{21}(x^2-x-1) + a_{31}(x+1) = x^2+x+1 = p_1$$

$$a_{12}(x^2+2) + a_{22}(x^2-x-1) + a_{32}(x+1) = x+2 = p_2$$

$$a_{13}(x^2+2) + a_{23}(x^2-x-1) + a_{33}(x+1) = x^2-x = p_3$$

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{ccc} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{array}$$

3 soustavy se stejnou levou stranou – budeme to dělat najednou

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \left| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{matrix}}_{C} \right) \sim \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{matrix} \right.\right)$$

$$\sim \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{matrix} \right.\right) \sim \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E} \left| \begin{matrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & -1/2 \end{matrix} \right.\right) \quad B^{-1}C$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \quad = (id)_{\beta,\alpha}$$

$$(id)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

2. způsob

$$\alpha = (x^2 + x + 1,\ x + 2,\ x^2 - x)$$

$$\beta = (x^2 + 2,\ x^2 - x - 1,\ x + 1)$$

$$\varepsilon = (x^2,\ x,\ 1)$$

$$(id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(id)_{\varepsilon,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(id)_{\beta,\alpha} = (id)_{\beta,\varepsilon} \cdot (id)_{\varepsilon,\alpha}$$

$$= \Big(\underbrace{(id)_{\varepsilon,\beta}}_{B}\Big)^{-1} \cdot (id)_{\varepsilon,\alpha}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{matrix} \left| \ E \right.\right) \sim \dots \quad (E \mid B^{-1})$$ doma

$B^{-1} \cdot C$

$(B \mid C) \rightsquigarrow (E \mid B^{-1}C)$ Tohle jsme dělali v 1. části

$\alpha = (u_1\ u_2\ u_3) \qquad \beta = (v_1\ v_2\ v_3)$

$$\boxed{\alpha = \beta\,(id)_{\beta,\alpha}}$$

- Definice $(u_1\ u_2\ u_3) = (v_1\ v_2\ v_3)\,(id)_{\beta\alpha}$

$$\boxed{(u)_\beta = (id)_{\beta\alpha}\,(u)_\alpha}$$

Příklad. 2. Na minulém cvičení v příkladu 4 jsme hledali matici lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadaného předpisem

$(\varphi)_{\varepsilon_2, \varepsilon_3}$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad v_1 \quad v_2$

v bázích $\alpha = ((1,0,1)^T, (1,1,2)^T, (1,-1,2)^T)$ a $\beta = ((1,2)^T, (2,3)^T)$. Tentokrát ji spočítejte pomocí "vzorečku" s maticemi přechodu, kde se vyskytují standardní báze $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$.

Minule z definice

$\varepsilon_2 = (1,0), (0,1)$

$\varepsilon_3 = (1,0,0) = e_1$
$(0,1,0) = e_2$
$(0,0,1) = e_3$

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \Big((\varphi(u_1))_\beta \; (\varphi(u_2))_\beta \; (\varphi(u_3))_\beta \Big)$$

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)_{\varepsilon_2}$$

$$\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)_{\varepsilon_2}$$

$$\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)_{\varepsilon_2}$$

$$(\varphi)_{\varepsilon_2, \varepsilon_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = (id)_{\beta, \varepsilon_2} \cdot (\varphi)_{\varepsilon_2, \varepsilon_3} \cdot (id)_{\varepsilon_3, \alpha}$$

$$\begin{tikzcd} \underset{\alpha}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "id"] \arrow[rrr, bend right, "\varphi"'] & \underset{\varepsilon_3}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "\varphi"] & \underset{\varepsilon_2}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "id"] & \underset{\beta}{\mathbb{R}^2} \end{tikzcd}$$

$$(\varphi)_{\varepsilon_2, \varepsilon_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (id_{\mathbb{R}^3})_{\varepsilon_3, \alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(id_{\mathbb{R}^2})_{\varepsilon_2, B} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$(id_{\mathbb{R}^2})_{B, \varepsilon_2} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}^{-1} = (-1)\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{B,\alpha} = \begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

Vynásobte sami po cvičení a porovnejte s výsledkem v minulém cvičení.

Příklad. 3. Najděte předpis pro složené zobrazení $\psi \circ \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$(\psi \circ \varphi)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

dvou lineárních zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadaných na vektorech bází takto:

$$\varphi(1,0,1) = (4,1),\ \varphi(1,1,2) = (9,1),\ \varphi(1,-1,2) = (5,3)$$
$$\psi(1,2) = (4,3,11),\ \psi(2,3) = (7,4,18).$$

Uměli byste bez počítání zjistit, zda je složené zobrazení lineární izomorfismus?

Řešení. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$ □

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$\varphi(x) = B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\psi(y) = C \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Potom $\quad (\psi \circ \varphi)(x) = \psi(B \cdot x) = C \cdot (Bx)$

$$= \underbrace{(C \cdot B)}_{= A} x$$

α báze $\mathbb{R}^3$

$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

$$\begin{tikzcd} \underset{\varepsilon_3}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "id"] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] & \underset{\alpha}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "\varphi"] & \underset{\varepsilon_2}{\mathbb{R}^2} \end{tikzcd}$$

$(\varphi)_{\varepsilon_2, \alpha} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$(\varphi)_{\varepsilon_2, \varepsilon_3} = (\varphi)_{\varepsilon_2, \alpha} \cdot (id)_{\alpha, \varepsilon_3}$

$(id)_{\varepsilon_3, \alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $(id)_{\alpha, \varepsilon_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$(id)_{\alpha, \varepsilon_3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{\varepsilon_2, \varepsilon_3} = (\varphi)_{\varepsilon_2, \alpha} \cdot (id)_{\alpha, \varepsilon_3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$(\psi)_{\varepsilon_3, B} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 4 \\ 11 & 18 \end{pmatrix} \qquad \underset{\varepsilon_2}{\mathbb{R}^2} \xrightarrow{id} \underset{B}{\mathbb{R}^2} \xrightarrow{\varphi} \underset{\varepsilon_3}{\mathbb{R}^3}$$

$$(\psi)_{\varepsilon_3, \varepsilon_2} = (\psi)_{\varepsilon_3, B} \cdot (id)_{B, \varepsilon_2}$$

$$(id)_{\varepsilon_2, B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad (id)_{B, \varepsilon_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(\psi)_{\varepsilon_3, \varepsilon_2} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 4 \\ 11 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} \right.$$

$$A = (\psi \circ \varphi)_{\varepsilon_3, \varepsilon_3} = (\psi)_{\varepsilon_3, \varepsilon_2} \cdot (\varphi)_{\varepsilon_2, \varepsilon_3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 13 \end{pmatrix} .$$

Příklad. 4. Pomocí řádkových úprav spočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix} = -\det\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -13 & -5 \end{pmatrix}}_{C}$$

$$\det C = 4 \cdot \det B \qquad \underline{B} = \begin{pmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ - & - & - & - \end{pmatrix}$$

$$= -4 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & -5 \end{pmatrix} = -4 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= -4 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 8 = \underline{\underline{32}}$$

$$= -4 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -13 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= (-4)(-1) \cdot (1 \cdot (-5) - (-13) \cdot 1)$$

$$(-4)(-8) = \underline{\underline{32}}$$

Příklad. 5. Pomocí řádkových úprav spočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} = V(a, b, c) \qquad V(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) \end{pmatrix} = (b-a)(c-a) \det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{pmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & \underbrace{c+a-b-a}_{c-b} \end{pmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a) \det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)\, 1 \cdot 1\, (c-b)$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

Příklad. 6. Vypočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} x & x & x & \dots & x & x \\ y & x & x & \dots & x & x \\ y & y & x & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \dots & y & x \end{pmatrix}. = C$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ y & x & x & & x & x \\ - & & - & & - & \end{pmatrix}$$

$$\det C = x \cdot \det B$$

$$= x \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ y & x & x & \dots & x & x \\ y & y & x & \dots & x & x \\ - & - & - & - & - & - \\ y & y & y & \dots & y & x \end{pmatrix} =$$

od 2., 3., ... n-tého řádku odečteme $y \cdot$ 1. řádek

horní Δ matice

$$= x \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & x-y & x-y & \dots & x-y & x-y \\ 0 & 0 & x-y & \dots & x-y & x-y \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x-y \end{pmatrix}$$

$$= x \cdot 1 \cdot (x-y)^{n-1}$$

✓

Příklad. 7. Vypočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & x+a_n \end{pmatrix}.$$

K 1. sloupci přičteme 2., 3., …, n-tý:

$$\det = \det \begin{pmatrix} x+\sum_{i=1}^{n} a_i & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ x+\sum_{i=1}^{n} a_i & x+a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ x+\sum_{i=1}^{n} a_i & a_2 & x+a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x+\sum_{i=1}^{n} a_i & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & x+a_n \end{pmatrix} =$$

Z 1. sloupce vytkneme $\left(x+\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$

C zaměníme za B

$$= \left(x+\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \det \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_2 & a_3 & & a_{n-1} & x+a_n \end{pmatrix}$$

Od 2. sloupce odečteme a_2-násobek 1. sloupce

od 3. sloupce odečteme a_3-násobek 1. sloupce

atd

od n-tého sloupce odečteme a_n-násobek 1. sloupce

$$= \left(x+\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix}$$

matice dolní Δ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ & x & & \\ 0 & & x & \\ & & & x \end{pmatrix}$$

$$= \left(x + \sum_{i=1}^{n} a_i\right) x^{n-1} .$$