11. cvičení z M1110, podzim 2020

Příklad. 1. Vypočtěte determinant

$$\underline{D(a_1, a_2, \dots, a_n)} = \det \begin{pmatrix} a_1 + x & x & x & \dots & x & x \\ x & a_2 + x & x & \dots & x & x \\ x & x & a_3 + x & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x & a_n + x \end{pmatrix}.$$

Návod. Pomocí řádkových úprav a Laplaceova rozvoje lze odvodit rekurentní vztah mezi $D(a_1, a_2 \dots, a_n)$ a $D(a_2, a_3, \dots, a_n)$. □

od 1. ř. odečteme 2. ř, od 2. ř. odečteme 3. ř, atd až od (n-1)-ního odečteme n-tý ř.

$$= \det \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \\ x & x & x & x & \dots & x & a_n + x \end{pmatrix}$$

A_{n1}

A_{11}

Laplaceův rozvoj podle 1. sloupce

$$= (-1)^{1+1} \underbrace{a_1 \cdot \det \begin{pmatrix} a_2 & -a_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & -a_4 & \dots & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & -a_n \\ x & x & x & x & a_n + x \end{pmatrix}}_{a_1 \cdot D_{n-1}(a_2, \dots a_n)}$$

$$+ \underbrace{(-1)^{n+1} x \cdot \det \begin{pmatrix} -a_2 & & & \\ a_2 & -a_3 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & a_{n-1} & -a_n \end{pmatrix}}_{\underbrace{(-1)^{n+1} (-1)^{n-1}}\, x \cdot a_2 a_3 \dots a_n}$$

$$x \cdot a_2 a_3 \dots a_n$$

(*) $$D_n(a_1 \dots a_n) = a_1 \cdot D_{n-1}(a_2, \dots a_n) + x\, a_2 a_3 \dots a_n$$

Rekurentní vztah

$$= a_1 \left\{ \underbrace{a_2 D_{n-2}(a_3, \dots a_n) + x \cdot a_3 \cdots a_n}_{D_{n-1}(a_2, \dots a_n)} \right\} + x\, a_2 a_3 \dots a_n$$

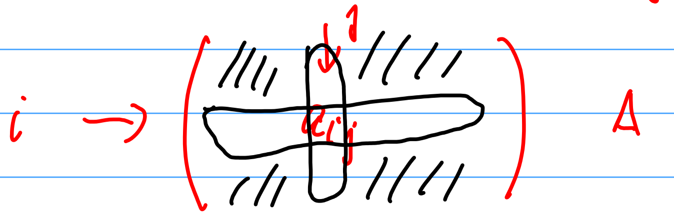
$$= a_1 a_2 D_{n-2}(a_3, \dots a_n) + a_1 x\, a_3 \dots a_n + x\, a_2 a_3 \dots a_n$$

$$D_1(a_n) = a_n$$

Toto splňuje (*)

$$D_n(a_1, \dots, a_n) = a_1 a_2 \dots a_n + \sum_{i=1}^{n} x\, a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n$$

Laplaceův rozvoj A $n \times n$ a_{ij} ... A_{ij} $(n-1)\times(n-1)$



A_{ij}

alg. doplněk $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

Lapl. rozvoj podle 1. sloupce

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot \tilde{a}_{i1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

To je výsledek je správně lze dokázat indukcí.

Příklad. 2. Vypočtěte determinant

$$D_n = \det \begin{pmatrix} a+1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

$A_{n\,n-1}$ A_{nn}

Návod. Pomocí Laplaceova rozvoje lze odvodit rekurentní vztah. □

Laplaceův rozvoj podle posledního řádku

$$D_n = \underbrace{(-1)^{n+n-1}}_{(-1)} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} a+1 & a & & & 0 \\ 1 & a+1 & a & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & 1 & a+1 & 0 \\ & & & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$+ \underbrace{(-1)^{n+n}}_{1} \cdot (a+1) \det \begin{pmatrix} a+1 & a & & \\ 1 & a+1 & & \\ & & & a \\ & & 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$+ (a+1)\, D_{n-1}$$

V 1. det uděláme rozvoj podle posledního sloupce

$$D_n = - \left\{ \underbrace{(-1)^{n-1+n-1}}_{1} \cdot a \cdot D_{n-2} \right\} + (a+1)\, D_{n-1}$$

Shrnutí

$$D_n = (a+1)\, D_{n-1} - a \cdot D_{n-2}$$

Rekurentní vztah

$$D_1 = a+1$$

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} a+1 & a \\ 1 & a+1 \end{pmatrix} =$$

$$= (a+1)^2 - a = a^2 + a + 1$$

$$D_3 = (a+1) D_2 - a D_1 = (a+1)(a^2+a+1) - a(a+1) =$$

$= a^3 + a^2 + a + a^2 + a + 1 - a^2 - a = a^3 + a^2 + a + 1$

Lze uhodnout, že

$$D_n = a^n + a^{n-1} + \dots + a + 1$$

Dokážeme to indukcí, D_1, D_2 to splňují.
Jestliže to splňují D_{n-1} a D_{n-2}, pak

$$(a+1)D_{n-1} - aD_{n-2} = (a+1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1) - a(a^{n-2} + a^{n-3} \dots + 1)$$

$$= (a^n + a^{n-1} + \dots + a) + (\cancel{a^{n-1}} + a^{n-2} + \dots \cancel{a} + 1)$$

$$- (\cancel{a^{n-1}} + \dots + \cancel{a}) = a^n + a^{n-1} + \dots + 1 = D_n$$

Příklad. 3. Vypočtěte determinant matice $2n \times 2n$

$$D_{2n} = \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \boxed{\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}} & & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & c & \dots & \dots & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & \dots & 0 & d & 0 \\ c & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Návod. Pomocí Laplaceova rozvoje lze odvodit rekurentní vztah. □

Rozvoj podle 1. řádku / A_{11}

$$D_{2n} = (-1)^{1+1} a \cdot \det \begin{pmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & \iddots & \\ & & \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} & & \\ & \iddots & & \ddots & \\ c & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \boxed{d} \end{pmatrix}$$

rozvoj podle posl. řádku

$$+ \underbrace{(-1)^{1+2n}}_{(-1)} b \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & a & \dots & & b \\ & & \ddots & \iddots & \\ & & \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} & & \\ & \iddots & & \ddots & d \\ \boxed{c} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rozvoj podle posl. řádku

$$= a (-1)^{2n-1+2n-1} \cdot d \det \underbrace{\begin{pmatrix} a & & & b \\ & \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} & & \\ c & & & d \end{pmatrix}}_{D_{2n-2}}$$

$$- b \cdot \underbrace{(-1)^{2n-1+1}}_{1} c \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} a & & & b \\ 0 & \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} & & 0 \\ c & & 0 & d \end{pmatrix}}_{D_{2n-2}} = (ad - bc) \cdot D_{2n-2}$$

$$D_{2n} = (ad-bc)\,D_{2n-2}$$

$$D_{2\cdot 1} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad-bc$$

Ovalud seegne

$$D_{2\cdot 2} = (ad-bc)\,D_{2\cdot 1}$$
$$= (ad-bc)(ad-bc)$$

$$D_{2n} = (ad-bc)^{n}$$

Příklad. 4. Vypočtěte determinant matice $n \times n$

$$D_n = \det \begin{pmatrix} x+2y & x & x & \dots & x & x-y \\ x-y & x+2y & x & \dots & x & x \\ x & x-y & x+2y & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x+2y & x \\ x & x & x & \dots & x-y & x+2y \end{pmatrix}.$$

Všechny řádky 2., 3., … n-tý přičteme k 1. ř

$$D_n = \det \begin{pmatrix} nx+y & nx+y & \dots & nx+y \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$= (nx+y) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x-y & x+2y & x & & x & x \\ x & x-y & x+2y & - & x & x \end{pmatrix}$$

Od 2., 3., … n-tého odečteme $x \cdot$ 1. řádek

$$= (nx+y) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ -y & 2y & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -y & 2y & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -y & 2y \end{pmatrix}$$

$$= (nx+y)\, y^{n-1} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

na přednášce $\det \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 \\ -1 & x & & \\ & -1 & x & \\ & & \ddots & x \end{pmatrix}$ rozepíná podle 1. řádku

$a_n x^n + \dots a_1 x + a_0$

$$= (nx+y)\,y^{n-1}\Big\{ \underbrace{(-1)^{1+1}}_{1}\, 1 \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ -1 & \ddots & \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{2^{n-1}} +$$

$$+ \underbrace{\underbrace{(-1)^{1+2}}_{-1}}_{(-1)} \underbrace{\underbrace{\det\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & 0 \\ & -1\;2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}}_{(-1)\cdot 2^{n-2}}}_{}\; + \cdots$$

$$2^{n-2}$$

$$\underbrace{+ (-1)^{1+n} \det\begin{pmatrix} -1 & 2 & & 0 \\ & -1 & & \\ & 0 & \ddots & 2 \\ & & & -1 \end{pmatrix}}_{\underbrace{(-1)^{1+n}\,(-1)^{n-1}}_{1}}$$

$$= (nx+y)\,y^{n-1}\left\{ 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 1 \right\}$$

$$= (nx+y)\,y^{n-1}\left(2^n - 1\right)$$

Příklad. **5.** Pomocí algebraických doplňků spočítejte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \left(\frac{\tilde{a}_{ij}}{\det A} \right)^T$$

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ji}}{\det A}$$

$$\det A = 1\cdot 3\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 3\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1$$

$$= 3\cdot 6 - 27 - 8 - 1 =$$

$$= 18 - 36 = \underline{\underline{-18}}$$

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{1}$$

$$\tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -7$$

$$\tilde{a}_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -\underline{1}$$

$$\tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -1$$

$$\tilde{a}_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -7$$

$$\tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -\underline{1}$$

$$\tilde{a}_{23} = (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 5$$

$$\tilde{a}_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -7$$

$$\tilde{a}_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-18} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Sami se přesvědčte, že

$$A^{-1} \cdot A = E.$$

$\tilde{a}_{ij}$

Příklad. 6. Pomocí algebraických doplňků spočítejte inverzní matici k matici tvaru $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. = (a_{ij})$$

$$\tilde{a}_{ii} = \underbrace{(-1)^{i+i}}_{1} \cdot \det \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & x & 0 & \\ & 1 & \ddots\ x & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & \begin{matrix} 1 & x & 0 \\ & \ddots & x \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{array} \right) = 1$$

$$a_{12} = x$$

$$\tilde{a}_{12} = \underset{(-1)}{(-1)^{1+2}} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{pmatrix} = 0$$

$$\tilde{a}_{13} = \underbrace{(-1)^{1+3}}_{1} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} = 0$$

$i < j$

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}_{24} = (-1)^{2+4} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} = 0$$

Stejně to dostaneme pro $\tilde{a}_{ij}$ $\quad i < j$

Prozatím $\det A = \underline{1}$

$$\left(\tilde{a}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ -x & 1 & 0 & & 0 \\ x^2 & -x & 1 & & 0 \\ -x^3 & x^2 & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & 1 \\ (-1)^{n-1}x^{n-1} & & & & \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & x & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & x \\ 0 & 0 & \vdots & & 1 \end{pmatrix} = -x$$

$$\tilde{a}_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & & \\ 1 & x & 0 & & \\ & 0 & 1 & x & \\ & 0 & & 1 & \ddots & x \\ & \vdots & & & & 1 \end{pmatrix} = x^2$$

$$\tilde{a}_{i1} = (-1)^{i+1} \det \begin{pmatrix} x & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ & 1 & x & & \\ & & & 1 & x \\ & & & & 1 & \ddots \end{pmatrix} = (-1)^{i+1} x^{i-1}$$

Závěr

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & x^2 & -x^3 & \cdots & (-1)^{n-1}x^{n-1} \\ & 1 & -x & x^2 & & \vdots \\ & & 1 & & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & & -x \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ & & & \end{pmatrix}$$

Příklad. 7. Vypočtěte determinant matice $n \times n$:

$$D_n = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-4 & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 4 & 5 & 6 & \dots & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. $(-1)^{n-1}\frac{1}{2}n^{n-1}(n+1)$ □

K 1. řádku přičteme ostatní

$$1+2+\dots+n = \frac{(n+1)n}{2}$$

a toto číslo vytkneme

$$D_n = \frac{(n+1)n}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & & n-2 \\ & & & \vdots & \end{pmatrix}$$

Od 2. ř. odečteme 3. ř.

3. ř. —"— 4. ř.

...

(n-1) ř —"— n-tý řádek

$$D_n = \frac{(n+1)n}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ & & & & 1-n & 1 \\ 2 & 3 & & & n & 1 \end{pmatrix}$$

Od 2., 3., .. (n-1)-ního řádku odečtem 1. řádek

$$D_n = \frac{(n+1)n}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & -n & 0 \\ 2 & 3 & & & n & 1 \end{pmatrix}$$

Od n-tého sloupce odečteme 1. sloupec

$$D_n = \frac{(n+1)n}{2} \det \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & -n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & -n & 0 \\ \hline 2 & 3 & & & n & -1 \end{array}\right)$$

$$= \frac{(n+1)n}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -n & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & -n \end{pmatrix} \cdot \det(-1)$$

$$= \frac{(n+1)n}{2} (-1)^{n-2} \cdot n^{n-2} \cdot (-1) =$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot n^{n-1} \cdot \frac{n+1}{2}$$